Universidade de Aveiro
Ano 2013

Departamento de Educação

DULCE MARIA FIGUEIREDO DE JESUS

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 2.º CEB

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2013

DULCE MARIA FIGUEIREDO DE JESUS

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 2.º CEB

Relatório apresentado à Universidade de Aveiro, para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, realizado sob orientação científica da Doutora Teresa Bixirão Neto do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho ao meu marido Vítor Sousa e ao meu filho, André Sousa, por todo o amor e compreensão, que me ajudaram a enfrentar este desafio até ao fim.

O júri

presidente

Doutor Rui Marques Vieira
professor auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge
professora adjunta do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À minha família em especial aos meus pais pelo incentivo e pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis.

À minha orientadora, Professora Maria Teresa Bixirão Neto, pela disponibilidade, motivação, ajuda e partilha de ideias.

Às minhas companheiras, Sandra Jesus e Rita Mendes, por esta inesquecível jornada.

Aos professores cooperantes, Rui Pinheiro, Clara Fernandes, Graça Teiga, Marina Carvalhosa e João Santos, pelo apoio e disponibilidade que demonstraram ao longo da minha Prática Pedagógica.

Aos alunos que participaram neste estudo, pois foram elementos essenciais para a concretização deste trabalho.

À direção da escola, por ter permitido a realização deste estudo.

palavras-chave Raciocínio proporcional, Matemática, Ensino Básico, Geometria, Ampliação de figuras.

resumo

Este estudo foi desenvolvido na unidade curricular Prática Pedagógica Supervisionada B2, que faz parte do curso de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e teve como objetivo analisar os procedimentos que os alunos do 5.º ano utilizam na resolução de tarefas que envolvem proporcionalidade direta, antes do ensino formal da mesma. Além disso, pretende-se promover a interdisciplinaridade entre a Educação Tecnológica, Educação Visual, Português e Ciências Naturais. Para atingir esta finalidade foi planificada uma experiência de ensino realizada com um grupo de alunos do 5.º ano no Colégio D. José I, tendo em vista dar resposta às três questões de investigação: i) Que procedimentos utilizam os alunos do 2.º CEB na resolução de tarefas que envolvem o raciocínio proporcional? ii) Em que fase do raciocínio proporcional os alunos se encontram antes do ensino formal da proporcionalidade direta?; iii) Que dificuldades apresentam os alunos quando confrontados com situações que envolvem o raciocínio proporcional?

Tendo em conta a natureza das questões de investigação, realizou-se uma investigação do tipo qualitativo, baseada na investigação-ação. Para isso, foram recolhidos dados através da elaboração de notas de campo, das produções orais e escritas dos alunos e do questionário.

Os resultados apontam que na análise do raciocínio proporcional os alunos, intuitivamente, conseguem obter a razão de semelhança, no entanto, têm dificuldades em aplicar o raciocínio proporcional na ampliação de figuras.

keywords Proportional reasoning, Maths, Basic Education, Geometry, Magnification of figures.

abstract This study was conducted in the curricular unit of Supervised Teaching Practice Course B2, which is part of the Masters in Teaching 1st and 2nd Cycle of Basic Education (CEB) and is aimed to analyse the procedures that students of the 5th grade use in solving problems involving direct proportion, before this concept was formally taught. Furthermore, we intend to promote interdisciplinary instruction between the subjects of Technological Literacy, Portuguese and Natural Sciences. To achieve this purpose, a teaching experience was planned, conducted with a group of 5th grade students. From Colégio D. José I, in order to respond to the three research questions: i) Which procedures do students in the 2nd Cycle of Basic Education use when solving problems involving proportional reasoning ii) At which stage of proportional reasoning are students before they are formally taught direct proportionality? iii) What difficulties do students have when faced with situations involving proportional reasoning?

Given the nature of the research questions, we carried out a qualitative research based on research - action. Thus, data was collected through the preparation of field notes, oral and written productions of students and the questionnaire.

The results show that when analyzing proportional reasoning, students intuitively manage to get the ratio of similarity. However, they present difficulties in applying proportional reasoning in expanding figures.

“Ser professor implica saber quem sou, as razões pelas quais faço o que faço e consciencializar-me do lugar que ocupo na sociedade.”

Isabel Alarcão

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Gráficos

Introdução

Na parte inicial deste estudo é feita uma breve referência ao programa de matemática do Ensino Básico (EB), são apresentadas as razões que motivaram a realização desta Experiência de Ensino (EE) centrada no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Além disso, são referidos os objetivos, o problema, e as questões às quais se pretende dar resposta. No final apresento a organização do relatório.

Motivação e pertinência do estudo

O conceito "proporcionalidade direta" aparece no 2.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) integrado no tema álgebra, que surge como tema independente, a par de outros grandes temas da matemática como: números e operações, geometria e organização e tratamento de dados. Contudo, a álgebra é introduzida no 1.º CEB, integrada no tema números e operações, no tópico regularidades.

No 1.º CEB pretende-se que se atinjam os objetivos específicos de investigar regularidades numéricas e resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional. Ainda neste ciclo, o trabalho com números racionais deve incluir a exploração de situações que desenvolvam conceitos como razão ou proporção, permitindo que no 2.º CEB haja um estudo mais aprofundado sobre o conceito de proporcionalidade direta que possibilite a aquisição dos objetivos específicos previstos no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), nomeadamente compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade e resolver problemas que envolvam situações de proporcionalidade direta. Desta forma, o PMEB dá bastante enfase à álgebra, salientando o contributo do trabalho neste tema para o pensamento matemático. Ponte, Branco e Matos (2009) acentuam o trabalho neste tema em três vertentes fundamentais do pensamento algébrico, representar, raciocinar, e resolver problemas.

Ao contrário, do que acontecia a alguns anos em que o foco central do ensino da aprendizagem da álgebra eram as regras de manipulação de expressões que envolviam variáveis, hoje acredita-se que a álgebra seja um contributo para a construção do conhecimento matemático dos alunos. Ponte, Branco e Matos (2009) referem "no centro da álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos." (p. 7)

Tendo em conta a importância da aprendizagem da proporcionalidade direta, esta não se esgota na matemática, ela é utilizada noutras áreas do saber, durante toda a escolaridade, nomeadamente na área das ciências, por exemplo, em física no cálculo da velocidade média, em medicina, por exemplo nas prescrições médicas ou análises laboratoriais. Também dentro da matemática, a sua aprendizagem é aproveitada noutros temas, nomeadamente em geometria, por exemplo, na ampliação ou redução de figuras. Segundo o NCTM (2007), "As conexões dentro da própria matemática, as conexões entre a matemática e as experiências, e as conexões entre a matemática e outras disciplinas podem apoiar a aprendizagem (…) fazer da matemática um domínio de estudo desafiador, envolvente e excitante" (p. 239).

Além da profissionalização, pretende-se com esta investigação motivar os alunos para a resolução de problemas que envolvam a proporcionalidade direta, uma vez que ao ser ensinada, não tendo em conta as experiências dos alunos, suscita desinteresse e muitas dificuldades.

Este estudo foi desenvolvido no âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º CEB, em articulação com as unidades curriculares *Seminário de Investigação Educacional* e *Prática Supervisionada B* (PPS B). Neste sentido, esta investigação foi realizada no 2.º CEB, porque no período da implementação das tarefas a PPS B2 (2.º semestre) decorria no 2.º CEB no Colégio D. José I, situado na freguesia de S. Joana no lugar de Solposto que pertence ao concelho de Aveiro.

Segundo o plano curricular da PPSB2[1], assume-se um cenário de formação privilegiado que apela ao conjunto de saberes e competências desenvolvidas e a desenvolver ao longo

[1] Retirado do site do Departamento da Educação da Universidade de Aveiro: http://www.ua.pt/de/PageDisc.aspx?id=6295

do percurso formativo, permitindo ao formando (re)construir o que sabe através do questionamento que o conhecimento prático possibilita. Desta forma, a PPSB2 visa para além do compromisso e a profissionalização pela prática docente, pôr em prática os conhecimentos adquiridos nas unidades curriculares da formação educacional geral e das didáticas específicas para a intervenção curricular no 1.º e 2.º CEB e o desenvolvimento de competências de reflexão crítica, suportadas por atitudes de investigação permanente. Desta forma o professor desempenha um papel ativo na educação, fundamentando a sua prática numa reflexão teórica que organiza a estrutura da ação. Com base na perspetiva de Dewey, Alarcão (1996) refere que "não se pode conhecer sem agir e não se pode agir sem conhecer." Certamente, este trabalho realizado durante a PPSB 2 é uma boa oportunidade para alargar os conhecimentos e dar resposta a questões, que vão servir para melhorar as práticas futuras.

Problema e questões de investigação

O grande desafio desta investigação, face à importância da proporcionalidade direta e às dificuldades que os alunos apresentam, é conhecer e compreender os procedimentos que os alunos apresentam na resolução de problemas que envolvam o raciocínio proporcional, tendo em vista, os processos matemáticos, designadamente a representação, o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação. Pois "À medida que várias ideias são testadas, com a colocação de questões adequadas e a orientação de um professor, os alunos acabam por convergir para a utilização das proporções" NCTM (2007, p. 57).

Problema:

O problema que é colocado neste estudo surge da seguinte questão:

Se os alunos no 6.º ano precisam da regra de três simples para resolver problemas que envolvam o conceito de proporcionalidade direta, então como é que conseguem resolver esses problemas nos anos anteriores sem ter o conhecimento dessa regra?

Assim, a principal finalidade deste trabalho é:

Analisar o raciocínio proporcional dos alunos através de tarefas de natureza exploratória.

Na tentativa de atingir esta finalidade, pretende-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

- Que procedimentos utilizam os alunos do 2.º CEB na resolução de problemas que envolvam o raciocínio proporcional?
- Em que fase do raciocínio proporcional os alunos se encontram antes do ensino formal da proporcionalidade direta?
- Que dificuldades apresentam os alunos quando confrontados com situações que envolvam o raciocínio proporcional?

Objetivos

- Analisar os procedimentos utilizadas pelos alunos em tarefas que envolvam o raciocínio proporcional;
- Identificar em que fase do raciocínio proporcional, se encontram os alunos;
- Reconhecer situações que não envolvem proporcionalidade direta;
- Desenvolver capacidades cognitivas sobre proporcionalidade direta.

Organização da investigação

Esta investigação organizou-se em seis capítulos. Em primeiro lugar aparece uma parte introdutória, onde serão referidas as razões desta investigação, assim como, os objetivos, o problema e as questões às quais se pretende dar resposta, após uma análise dos resultados. Segue-se a primeira parte deste trabalho, onde consta o enquadramento teórico que se encontra dividido em dois capítulos: o primeiro com especial relevo para o enfoque ontossemiótico de Educação Matemática e as tarefas matemáticas, nomeadamente problemas e investigações; o segundo capítulo onde serão abordados alguns aspetos importantes sobre o raciocínio proporcional para a implementação e análise deste estudo. O terceiro capítulo inicia a segunda parte deste estudo, a parte empírica, neste serão conhecidas as opções metodológicas e os procedimentos adotados relativamente à recolha de dados, bem como a caraterização do contexto pedagógico e a caraterização da turma que participa nesta investigação. No quarto capítulo consta o desenho das tarefas, nomeadamente, a planificação e a descrição das mesmas. A segunda parte termina com o capítulo cinco, mais concretamente com a análise dos dados. Finalmente, no sexto capítulo e terceira parte serão apresentadas as conclusões e a reflexão final.

I – Enquadramento Teórico

Capítulo 1

Ensino e Aprendizagem da Matemática: Perspetiva ontossemiótica

Neste primeiro capítulo é feita uma sucinta abordagem às facetas e níveis de análise didática que compõem o modelo teórico desenvolvido por Godino e seus colaboradores, que visa o estudo dos processos de ensino e aprendizagem de objetos incluídos numa tarefa matemática. No tópico seguinte é feita uma abordagem a alguns tipos de tarefas matemáticas.

1.1. Enfoque ontossemiótico

Segundo Godino, Batanero e Font (2008), o estudo de fatores que condicionam os processos de ensino e aprendizagem da matemática e o desenvolvimento de formações que visam a melhoria desses processos são os principais objetivos da educação matemática. Para isso, esta deve, não só considerar as contribuições de diversas áreas como a psicologia, a pedagogia, a filosofia ou a sociologia, mas também deve estar baseada numa análise da natureza dos conteúdos matemáticos, o seu desenvolvimento cultural e pessoal, no âmbito das instituições escolares. Esta análise ontológica (tipos de objetos e sua natureza) e epistemológica (acesso ao conhecimento e saberes científicos) permite estudar os processos de ensino e aprendizagem de objetos generalizados. Assim sendo, estes autores pensam que é possível construir um enfoque unificado da cognição e instrução matemática, o Enfoque Ontossemiótico do conhecimento e ensino da Matemática (EOS).

Durante três longos períodos, estes autores desenvolveram "ferramentas" teóricas que constituem o modelo ontológico-semiótico, para identificar e classificar os conhecimentos envolvidos em contextos de aprendizagem da matemática.

De acordo com Godino, Batanero e Font (2008), numa primeira fase, consideraram apenas a "análise epistémica e cognitiva (dimensões instrucional e pessoal do conhecimento matemático), os sistemas de práticas manifestadas por um sujeito (ou no âmbito de uma instituição) para uma classe de situações problema" (p. 10). Desta forma, supera-se a ideia de que os objetos matemáticos se reduzem às definições e relações lógicas com outros objetos, dando lugar à ação.

No entanto, verificaram que os processos comunicativos requerem "interpretar tanto as entidades conceptuais como as situações problemáticas e os próprios meios expressivos e argumentativos que desencadeiam processos interpretativos." (p. 10). De acordo com estes autores, isto pressupõe conhecer os objetos emergentes dos tipos de práticas. Os objetos pessoais são aqueles que são realizados por uma pessoa, construções cognitivas, tais como esquemas, conceções ou representações internas. Os objetos institucionais são compartilhados numa instituição associados a uma situação problema, como procedimentos, proposições ou argumentos. A distinção entre os objetos pessoais e institucionais é importante para descobrir e explicar as interações entre professor e aluno nos processos de ensino-aprendizagem.

No EOS é proposta a seguinte tipologia de objetos matemáticos primários:

- *Situação-problema* (de onde surgem os objetos, por exemplo: uma tarefa ou um exercício).
- *Linguagem* (termos, expressões, notações, gráficos).
- *Definições* (introduzidos mediante definições ou descrições).
- *Proposições* (enunciados sobre definições).
- *Procedimentos* (algoritmos, operações, técnicas de cálculo, …).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos).

A situação-problema é a origem de toda a atividade, a linguagem serve como ferramenta para a ação e os argumentos justificam os procedimentos, proposições e os conceitos.

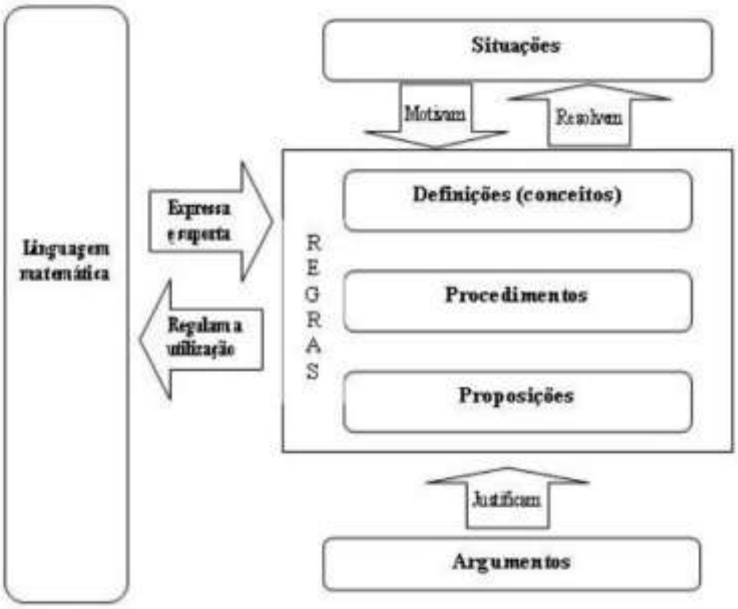


Figura 1 - Configuração dos objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas

Assim chegaram à conclusão que é preciso aprofundar as relações entre o pensamento, a linguagem matemática e as situações problema. Desta forma, desenvolveram "uma ontologia e uma semiótica especifica que estudem os processos de interpretação dos sistemas de símbolos matemáticos postos em jogo na interação didática." (p. 10).

Este modelo apresenta-se em forma de poliedro, cuja representação engloba diversas facetas e os níveis de análise do processo de ensino aprendizagem. Como mostra a figura seguinte:

Figura 2 - Facetas e níveis de análise didática Godino (2009, p.21)

Relativamente às várias facetas a ter em conta num processo de ensino aprendizagem, Godino (2009, p. 21) destinguem:

- *Epistémica*: Conhecimentos matemáticos relativos ao contexto instrucional em que se realiza o processo de estudo e a distribuição no tempo dos diversos componentes do conteúdo (problemas, linguagem, procedimentos, definições, propriedades e argumentos);
- *Cognitiva:* Conhecimentos pessoais dos alunos e progressão das aprendizagens;
- *Afetiva:* Estados afetivos (atitudes, emoções, crenças e valores) de cada aluno em relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido;
- *Mediacional:* Recursos tecnológicos e atribuição do tempo às diferentes ações e processos;
- *Interacional:* Padrões de interação entre o professor e os alunos e a sua sequenciação orientada para a fixação e negociação dos significados;
- *Ecológica:* Sistema de relações com o ambiente social, politico, económico, que suporta e condiciona o processo de estudo.

No que concerne aos níveis de análise propõem os seguintes: Godino (2009, p. 21 e 22)

- ***Práticas matemáticas e didáticas:*** Descrição das ações realizadas para resolver as tarefas matemáticas propostas, para contextualizar os conteúdos e promover a aprendizagem. Também se descrevem as linhas gerais de atuação do docente e discentes.
- ***Configurações de objetos e processos (matemáticos e didáticos):*** Descrição de objetos e processos matemáticos que intervêm na realização das práticas, assim como os que emergem delas. A finalidade deste nível é descrever a complexidade de objetos e significados das práticas matemáticas e didáticas como fator explicativo dos conflitos na sua realização e da progressão na aprendizagem.
- ***Normas e metanormas:*** Identificação do conjunto de regras, hábitos e normas que condicionam um processo de estudo e afetam cada faceta e as suas interações.

- ***Adequação:*** Identificação de potenciais melhorias do processo de estudo que aumentam a adequação didática.

Critérios de adequação didática

As noções teóricas anteriores complementam-se com a noção de adequação didática de um processo de instrução, definido por Godino (2011) como uma ferramenta que permite a passagem “de uma didática descritiva-explicativa para uma didática normativa, isto é, uma didática que se oriente para a intervenção afetiva.” (p. 5)

Adequação epistêmica: refere-se ao grau de representação dos significados institucionais implementados ou pretendidos, com relação ao significado de referência. Esta componente envolve uma situação problema, linguagem, procedimentos, definições, propriedades e argumentos.

Adequação cognitiva: expressa o grau em que os significados pretendidos ou implementados estejam na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, assim como a proximidade destes significados pessoais atingidos aos significados pretendidos ou implementados.

Adequação interacional: Um processo de ensino aprendizagem terá maior adequação do ponto de vista interacional, se as configurações e trajetórias didáticas permitirem, por um lado, identificar conflitos semióticos potenciais (que podem ser detetados a priori) e por outro lado, resolver os conflitos que forem produzidos durante o processo de instrução. Apraz referir que conflitos semióticos é qualquer discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos. Podem existir conflitos semióticos epistêmicos (discordância entre significados institucionais), conflitos semióticos cognitivos (discordância entre práticas que formam o significado pessoal de uma pessoa), conflitos semióticos interacionais (discordância entre as práticas de duas pessoas em interação comunicativa).

Adequação mediacional: grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Adequação emocional: grau de implicação (interesse, motivação e empenho) do aluno no processo de construção de conhecimentos. Esta componente, não só se relaciona com a instituição e com o professor, mas também com o historial do aluno.

Adequação ecológica: grau em que o processo de construção de conhecimento está de acordo com o projeto educativo da escola ou outro documento oficial.

Godino, Batanero e Font (2008, p. 22 e 23)

O hexágono da figura 4 representa uma síntese dos critérios que compõem a adequação didática:

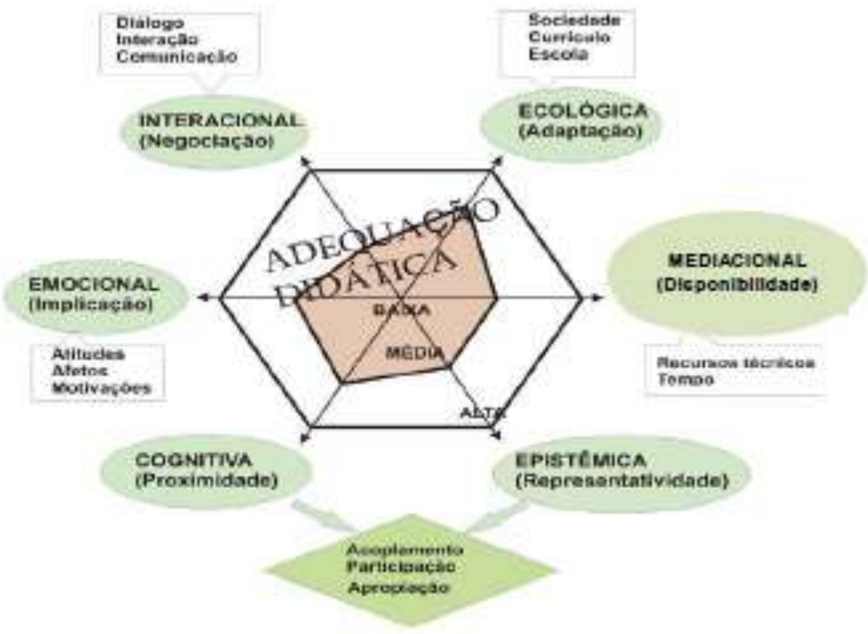


Figura 3 - Esquema dos critérios de adequação didática, Godino, Batanero e Font (2008)

1.2.Tipos de tarefa

O ensino-aprendizagem da matemática, segundo a perspetiva de alguns autores citados por Ponte (2005), resulta de dois fatores: a atividade que realizam e a reflexão que efetuam sobre ela. Quando o aluno está envolvido numa atividade, realiza uma determinada tarefa, então a tarefa é o objetivo da atividade. Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), citados por Martins (2010) referem que as tarefas propostas são exteriores ao aluno; ele tem que as interpretar e, ao interpretá-las, poderá executar algumas ações, com mais ou menos entusiasmo, estando assim, a desenvolver a sua atividade. Ponte e Serrazina (2000) propõem a seguinte distinção:

> As tarefas matemáticas que o professor propõe aos alunos – problemas, investigações, exercícios, projetos, construções, jogos, apresentações orais, relatórios, composições escritas, etc. – constituem o ponto de partida para o desenvolvimento da sua atividade matemática. A atividade do aluno, tanto física como mental, diz respeito ao que ele faz num dado contexto. Qualquer atividade inclui a execução de numerosas ações. O objetivo da atividade é precisamente a tarefa, algo exterior ao aluno. Uma tarefa, embora seja na maior parte dos casos proposta pelo professor, tem de ser interpretada pelo aluno e pode dar origem a atividades muito diversas – ou nenhuma atividade – conforme a disposição deste e o ambiente de aprendizagem da sala de aula. Assim, a atividade é realizada pelo aluno e constitui a base fundamental da sua aprendizagem. (p. 112)

A tarefa, segundo os mesmos autores, pode surgir de diversas maneiras: pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno; ser da iniciativa do aluno ou resultar de uma negociação entre professor e aluno; pode ser enunciada logo no início do trabalho ou construída implicitamente à medida que o trabalho decorre. Existem muitos tipos de tarefas sendo as mais conhecidas os problemas, os exercícios, as investigações, as explorações e os projetos.

Problemas

A resolução de problemas é um dos procedimentos pedagógicos mais utilizados no ensino da matemática, pois para além de ser de grande importância para a construção de conceitos e do desenvolvimento do raciocínio interpretativo do aluno, poderá ser o elo de ligação com a realidade, ou seja, pode trazer para a sala de aula situações do quotidiano do aluno, despertando a sua curiosidade.

A maior parte dos autores concorda que a diferença entre exercício e problema é que o primeiro exige mecanismos que nos conduzam de forma imediata à sua solução, já a resolução de um problema não é assim tão imediata. Uma mesma situação pode ser um problema para alguns e um exercício para outros, dependendo do seu conhecimento prévio. Se o aluno conhecer um processo e for capaz de o executar, então estamos perante um exercício, caso contrário a situação será um problema. O principal objetivo do exercício é colocar em prática os conhecimentos já adquiridos, servem essencialmente para consolidar conhecimentos.

Embora os problemas tenham um lugar bem estabelecido no ensino da matemática desde a antiguidade, foram os trabalhos de George Pólya que clarificaram o seu papel educativo. Para este autor, Pólya (1975), citado por Ponte e Serrazina (2000) os problemas devem desafiar as capacidades matemáticas dos alunos e despertar, nestes, o gosto pela descoberta. Esta é uma condição essencial para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da matemática e desenvolver o gosto por esta unidade curricular.

Segundo este autor para se chegar à fase final de um problema é necessário que o aluno proceda a uma sequência de passos, como por exemplo:

(i) *Compreender* o problema, nesta fase o aluno deve ler o enunciado do problema e identificar os dados que o problema nos dá e o que nos pede;
(ii) *Conceber* um plano, procedendo à recolha de dados, à realização de cálculos, nesta fase o aluno pode utilizar vários tipos de representações (esquemas, tabelas, gráficos).
(iii) *Executar* o plano, depois de planear é altura de pôr em prática os seus cálculos, com vista a encontrar a solução do problema.
(iv) *Refletir* sobre o trabalho feito, quando o aluno encontra a solução não significa que resolveu o problema, deve voltar atrás, verificar se está correta a sua resolução, confirmar se não existe outra solução. Nesta fase o professor também tem um papel importante, questionando o aluno a respeito da veracidade da sua resposta, se não haverá outras respostas e poderá confrontar com as respostas dos colegas.

Esta fase final da resolução de problemas é muito importante, porque para além de os obrigar a refletir sobre o que fizeram, também estimula o diálogo na sala de aula, partilhando ideias, desenvolvendo novas estratégias que entretanto aprenderam com o colega do lado. Segundo o NCTM (2007), “A resolução de problemas não constitui um tópico isolado, mas um processo que deverá atravessar o estudo da matemática e proporcionar um contexto no qual os conceitos e as capacidades são apreendidos.” (p.

212). Quantas mais oportunidades se derem ao aluno, durante a vida escolar, de contactarem com diferentes situações-problema, mais confiança e destreza ele recolhe, permitindo, na sua vida adulta agir com inteligência e naturalidade ao ter que superar obstáculos que poderão surgir no seu quotidiano.

Investigações

As investigações são o resultado de tarefas de carácter aberto, a sua ênfase está nos processos aplicados e não na procura de soluções. Os alunos envolvidos nas investigações podem ter percursos diferentes dependendo da forma como esta é conduzida e da forma como são colocadas as questões, estas devem ser pertinentes de modo a gerar conhecimento matemático, também dependem da forma como as questões são discutidas pelos intervenientes da investigação, desta forma, podem existir várias formas de exploração e neste caso podemos interpretar como um processo divergente. Segundo Abrantes, Leal e Ponte (1996), citado por Martins (2010), as investigações matemáticas: "implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos. Mas, além disso, são caraterizadas por se partir de enunciados e objetivos pouco precisos e estruturados, levando a que sejam os próprios alunos a definir o objetivo, conduzir experiências, formular e testar hipóteses." (p. 29). Também Pirie (1987) citado pela mesma autora refere que "a ênfase está em explorar uma questão de matemática em todas as direções. O objetivo é a viagem e não o destino." (p. 33) o foco central é o processo e não o produto final. Este processo, dependendo da interação dos intervenientes, pode conduzir os alunos, envolvidos na mesma investigação, por caminhos diferentes, colocando questões produtivas que gerem conhecimento matemático.

Segundo Ponte e Serrazina, (2000), citando Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira, (1999), existem quatro etapas de uma investigação matemática:

- Formular a questão a investigar;
- Formular conjeturas relativamente a essa questão;
- Testar as conjeturas e, eventualmente, reformulá-las;
- Validar e comunicar os resultados.

O enunciado terá de ser pouco definido, as questões que orientam a investigação não precisam de ser muito rígidas, sendo o aluno a definir o seu caminho, colocando as suas questões e propondo uma ou mais hipóteses com vista à clarificação da questão ou problema inicial.

Quadro estruturador dos diferentes tipos de tarefas

Como foi referenciado, existem duas dimensões fundamentais das tarefas: o grau de desafio e o grau de estrutura de uma tarefa. Segundo Ponte (2005), o grau de desafio está relacionado com a dificuldade da questão ou tarefa que se propõe ao aluno e varia entre os extremos de desafio “reduzido” e “elevado”. O grau de estrutura varia entre os extremos “aberto” e “fechado”. Uma tarefa é fechada quando está referenciado o que é dado e o que é pedido e uma tarefa é aberta quando existe uma indefinição no que é dado e no que é pedido ou em ambas as vertentes.

Cruzando estas duas dimensões, o mesmo autor obtém quatro quadrantes, tendo em conta as suas características podemos situar nesses quadrantes as tarefas atrás referidas:

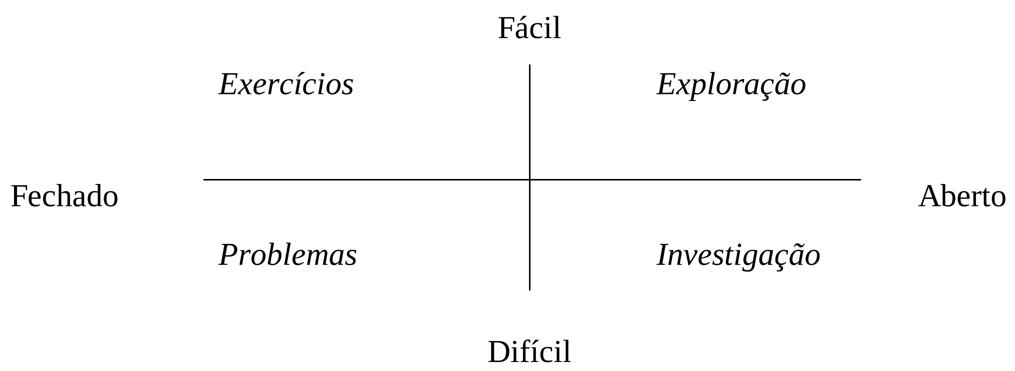


Figura 4 - Dimensão do grau de dificuldade e estrutura de uma tarefa de investigação

.

Desta forma, os exercícios são tarefas com dificuldade reduzida e estrutura fechada. Os problemas mantêm a mesma estrutura mas com maior grau de dificuldade. As investigações também têm um elevado grau de dificuldade mas uma estrutura mais aberta.

As explorações são tarefas com dificuldade reduzida mas assim como as investigações têm uma abertura maior.

A diferença entre tarefas de exploração e exercícios, nem sempre é muito visível, pois segundo Ponte (2005) "Um mesmo enunciado, pode corresponder a uma tarefa de exploração ou a um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos" (p. 9). Ou seja, se os alunos ainda não aprenderam formalmente o conceito implícito no enunciado, será uma tarefa de natureza exploratória, em que os alunos têm que mobilizar os seus conhecimentos intuitivos.

Para Ponte (2005) uma tarefa tradicionalmente importante na matemática é o jogo, este constitui um problema em que as regras estão bem definidas seja ele individual ou coletivo. Esta tarefa pode facultar um excelente trabalho de recolha e análise de dados e assim assumir uma natureza exploratória. Se o professor souber valorizar os respetivos aspetos matemáticos, o jogo pode ser muito profícuo na aprendizagem.

Capítulo 2

Raciocínio proporcional

Este capítulo é formado por seis tópicos. No primeiro tópico é feita uma breve nota histórica sobre a proporção na história da matemática, neste tópico mostrar-se-á algumas evidências da forma como a proporção era tratada na antiguidade, nomeadamente pelos egípcios, pelos babilónicos e pelos gregos. No segundo tópico enquadrar-se-á o raciocínio proporcional no EB, ao qual se seguirá a definição, o seu desenvolvimento, as dificuldades e estratégias.

2.1. Breve nota histórica sobre o raciocínio proporcional

Muitos dos conceitos que são utilizados na matemática surgiram na antiguidade. Um desses conceitos é a proporcionalidade direta, que se aplica em muitas ciências e no nosso quotidiano. A fim de perceber melhor o raciocínio proporcional que é utilizado na resolução de problemas e no desenvolvimento de conceitos matemáticos, considero relevante fazer uma breve abordagem sobre a proporção na história da matemática, com o propósito de conhecer como surgiu o conceito de proporção e como era utilizado.

No antigo Egito

A sociedade egípcia estabeleceu-se nas margens do rio Nilo e tinha como fatores característicos a prática da agricultura e o comércio, entre outros fatores. O Nilo estava sujeito a inundações provocadas pelas chuvas abundantes que eram consideradas um milagre divino, pois tornava as terras mais férteis para a prática da agricultura. Todavia, essas inundações, que ocorriam durante um determinado período do ano, permitiram que houvesse uma organização e administração das colheitas, fazendo surgir a matemática como ciência prática.

A matemática utilizada pelos povos egípcios era registada nos papiros. Estes documentos resistiram ao tempo, devido ao clima seco da região. O papiro mais conhecido e o mais importante é o Papiro de Rhind. Boyer (1996), considera-o um dos papiros egípcios mais extenso de natureza matemática, comprado por um antiquário escocês, Henry Rhind em 1858 numa cidade à beira do Nilo. Também é conhecido por *Papiro de Ahmes* em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a. C.

Ainda segundo este autor, nesse Papiro foram encontrados problemas aritméticos que envolvem objetos concretos relacionados com situações do quotidiano, cuja solução mostra o conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três simples. Também Eves (1992, p. 54) refere que muitos dos problemas contidos no Papiro de Rhind mostram como lidavam com questões relativas à "força" do pão e da cerveja, com misturas de alimentos para gado e aves domésticas, e com o armazenamento de grãos. Muitas delas exigiam nada mais do que uma equação linear simples e geralmente são resolvidas pelo método mais tarde conhecido na Europa como a regra da falsa posição. Por exemplo, no problema 72, segundo Boyer (1996), pergunta "qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10" (p. 11), a solução é apresentada como: $\frac{100}{10} \times 45$ ou 450 pães. Este autor também refere que a força do pão é o inverso da densidade do grão, sendo o quociente do número de pães dividido pela quantidade de grão. Assim sendo, a força é diretamente proporcional ao n.º de pães e inversamente proporcional ao n.º de grãos, pois quantos mais grãos forem utilizados menos força tem o pão.

No *Papiro de Rhind*, encontram-se problemas algébricos relacionados com proporções. Estes não incluem objetos concretos, nem exigem operações com números conhecidos, mas pedem a solução de uma equação linear em que a incógnita é denominada de *aha*. Segundo Eves (1992), para resolver o valor de *aha* sabendo que *aha* mais $\frac{1}{7}$ de *aha* dá 24 a solução é encontrada através de um método utilizado nos livros mais modernos, nomeadamente o *método de falsa posição*. Este método consiste em substituir a incógnita *aha* por um valor concreto, possivelmente falso, o resultado é então comparado com o resultado que se pretende e usando proporções chega-se à resposta correta. Mas vejamos como este autor (p. 54) descreve a solução deste problema: escolheu-se um valor para a incógnita *aha*, o número 7 seria uma boa escolha, pois evitava a fração $\frac{1}{7}$, convém referir que ao escolher o número 7 não se pretendia que fosse o número correto, era somente uma tentativa, assim obteve-se o seguinte resultado: $7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$. Como o resultado pretendido era 24 e o resultado obtido era 8 tinha que ser multiplicado por 3 para se obter 24, na mesma proporção deveria ser multiplicado o valor da falsa posição 7, para se obter o valor da incógnita, logo o valor da incógnita seria 21.

A civilização egípcia realizava a multiplicação através de consecutivas duplicações. Por exemplo para multiplicar 33 x 18 faziam duas colunas, na primeira coluna (da esquerda) colocavam o número 1 e na segunda coluna (da direita) colocavam o número 18, em seguida duplicavam os números das respetivas colunas até chegar ao número 33 na primeira coluna

1	18
2	36
4	72
8	144
16	288
32	576

Para obterem o resultado, escolhia-se valores da primeira coluna que adicionados davam 33 (32 + 1 = 33) depois adicionavam os valores correspondentes da segunda coluna e o total era o produto da multiplicação (18 + 576 = 594).

Ao analisar a tabela podemos verificar uma relação de invariância entre as duas colunas, ou seja, a razão entre a segunda coluna e a primeira é 18. Também se pode verificar uma relação de covariação das duas colunas, ou seja, os valores da primeira coluna são duplicados, assim como na segunda coluna. Estas relações serão explicadas no tópico “Definição do raciocínio proporcional”.

Na Babilónia

A civilização babilónica habitava numa região situada no Médio Oriente, no vale dos rios Tigre e Eufrates, chamada de Mesopotâmia. Esta, inicialmente, era habitada pelos sumérios que desenvolveram um sistema de escrita usando cunhas em tábuas de argila cozida ao sol ou em fornos, dando origem a carateres chamados cuneiformes. Estes documentos, segundo Boyer (1996), eram menos vulneráveis aos estragos do tempo do que os papiros, daí hoje haver muitos registos sobre a matemática da Mesopotâmia.

O sistema numérico babilónico era o sexagesimal, segundo Struik (1987), este sistema sobrepõe-se ao sistema decimal. Enquanto os egípcios indicavam cada unidade mais elevada com um novo símbolo, estes povos usavam o mesmo símbolo, mas indicavam o seu valor pela sua posição. "Assim 1 seguido por outro 1 significava 61 e 5 seguido por 6 e por 3 (deveríamos escrever 5, 6, 3) significava $5 \times 60^2 + 6 \times 60 + 3 = 18363.$ Este sistema de posição não diferia essencialmente do nosso próprio sistema de escrita de números, em que o símbolo 343 representa $3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$" (p.56). Mais adiante este autor ainda refere que nem sempre o significado exato de cada símbolo era claro em função da sua posição, pois 5,6,3 também podia significar $5 \times 60^1 + 6 \times 60^0 + 3 \times 60^{-1} = 306\frac{1}{20}$, assim sendo, a interpretação exata tinha que ser deduzida do contexto. Este sistema ainda hoje perdura na divisão das horas em 60 minutos e nos minutos em 60 segundos.

Segundo Eves (1992) muitos dos processos aritméticos foram realizados com o auxílio de tabelas, das quais se destacam a tabela da multiplicação, tabela dos recíprocos, tabela dos quadrados e cubos e tabela de exponenciais.

Figura 5 – Parte da tabela babilónica da multiplicação[2]

[2] Figura retirada do site: http://universomatematicaweb.blogspot.pt/2012/03/historia-da-matematica-matematica.html.

A tabela da multiplicação representada na figura 5 contém duas colunas, na primeira linha da primeira coluna aparece uma cunha vertical que representa o número 1, na segunda linha duas cunhas representam o 2 e assim por diante até ao 10 que é representado por uma cunha angular. Na décima primeira linha aparece uma cunha angular e outra vertical que representa o número 11, o processo repete-se para os números seguintes. Na segunda coluna pelos símbolos representados podemos perceber que se trata dos produtos da tabuada dos nove, ou seja a razão entre a segunda e a primeira coluna é nove. Logo podemos concluir que os babilónios já utilizavam o raciocínio multiplicativo que é utilizado no raciocínio proporcional.

Na Grécia antiga

A matemática grega também nos dá indícios de situações que envolvem proporções, é o caso de Tales de Mileto que segundo relatos de Diógenes Laertius, Plínio e Plutarco, referidos por (Boyer 1996), "mediu a altura das pirâmides do Egito observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical é igual à sua altura" (p. 32). Desta forma, Tales de Mileto não precisou de fazer cálculos. Todavia, Nobre (2004) contesta esta teoria referindo que tal pode não ter ocorrido devido ao facto de os períodos em que o Sol se encontra em posição de oferecer uma sombra para se efetuar as medições, são muito raros.

Durante a época grega e Romana e também durante toda a idade média até ao Renascimento, o livro Elementos de Euclides foi considerado o livro por excelência para o estudo da geometria. Com base nos escritos de Boyer 1996, dos treze livros de Euclides, os mais admirados têm sido o quinto e décimo, sendo que o quinto corresponde à teoria das proporções, aplicada à geometria plana, e o décimo aos incomensuráveis. Contudo, a matemática grega evitava as proporções, adiando a sua utilização o mais tempo possível, como exemplifica na p. 77, uma relação entre os comprimentos de duas formas $x \div a = b \div c$ seria pensada como uma igualdade entre áreas $cx = ab$, ora atualmente esta é a lei fundamental da proporção, mas Euclides não via dessa forma mas sim como igualdade entre áreas.

Mas, o uso das proporções tornou-se inevitável pois a teoria geral das proporções permitia trabalhar com produtos de qualquer número de dimensões, como explicita na p. 78, uma equação da forma $x^4 = abcd$ equivale a uma equação envolvendo produtos de razões de segmentos, como $\frac{x}{a} \times \frac{x}{b} = \frac{c}{x} \times \frac{d}{x}$, diminuindo o grau de complexidade. Segundo o mesmo autor p. 78, provou-se teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos que são semelhantes. Na proposição 31 do livro VI destaca-se uma generalização do teorema de Pitágoras: *Em triângulos retângulos a figura sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contêm o ângulo reto*.

A estrela de cinco pontas, é outra evidência do emprego da proporção por parte dos gregos, visto que, as suas pontas formam um pentágono regular e segundo Boyer (1996) as cinco diagonais deste formam outro pentágono regular menor, e as cinco diagonais deste formam outro pentágono ainda mais pequeno, conforme cita este autor (p.50), "este processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira". Pelo facto de todos estes pentágonos serem regulares podemos dizer que são semelhantes.

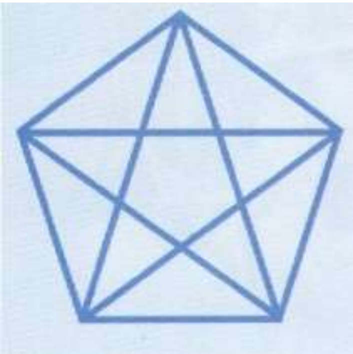


Figura 6 - Pentagrama

Este autor conclui ainda que "a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional" (p.50). A irracionalidade também se pode verificar na subdivisão das diagonais do pentágono pelos pontos de intersecção entre elas, uma vez que cada diagonal é dividida em dois segmentos desiguais, sendo o segmento maior irracional.

É interessante referir que o pentágono estrelado já tinha sido encontrado na arte babilónica, fazendo a ligação entre a matemática deste povo com a dos gregos pitagóricos.

Também podemos verificar o uso de proporções através da quadratura do círculo que é um dos três problemas famosos da antiguidade investigados por Hipócrates, este investigou, segundo Struik (1982, p.76) “as áreas de figuras planas delimitadas por linhas retas ou por arcos circulares”. Na tentativa de quadrar o círculo, Hipócrates fez várias quadraturas, que mostram que os matemáticos atenienses eram hábeis a tratar de transformações de áreas e proporções, pois segundo o mesmo autor este matemático “ensinou que as áreas de segmentos circulares semelhantes estavam entre si como os quadrados das suas cordas” (p. 76). Boyer (1996) explica que para provar este teorema, Hipócrates mostrou primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros.

Com o seu teorema, Hipócrates, deduziu a primeira quadratura de uma área curvilínea da história da matemática. Para tal, começou por desenhar um semicírculo circunscrito a um triângulo retângulo isósceles e sobre a hipotenusa construiu um segmento de círculo semelhante aos segmentos circulares sobre os catetos do triângulo, como podemos verificar na figura 7.

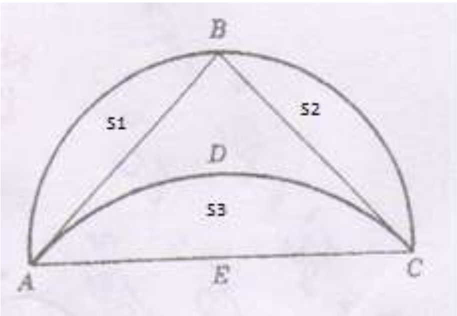


Figura 7 - Semicírculo circunscrito num triângulo retângulo isósceles

Usando o seu teorema, concluiu que a razão entre os segmentos de circulo S1 e S3 é a mesma que a razão entre os quadrados das suas bases, isto é, $\frac{S1}{S3} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Pelo teorema de Pitágoras concluiu ainda que $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{2}$, logo $\frac{S1}{S3} = \frac{1}{2}$, ou seja, S3 é o dobro de S1, donde Boyer (1996) conclui que “a soma dos dois segmentos circulares menores é igual ao segmento maior”, ou seja, $S1 + S2 = S3$. Portanto a área da luna (área do semicírculo tirando S3) é igual à área do triângulo (área do semicírculo tirando S1 e S2) que por sua vez é a mesma do quadrado cujo lado mede metade da base (hipotenusa) do triângulo, o que prova a quadratura da luna.

2.2. Raciocínio proporcional no EB

Ao longo dos ciclos no PMEB estão incluídos quatro grandes temas, nomeadamente números e operações, álgebra, geometria e medida e organização e tratamento de dados. No entanto, no primeiro ciclo o tema álgebra não aparece, todavia, as ideias algébricas estão presentes no trabalho com regularidades onde tem como objetivos específicos investigar regularidades numéricas e resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional. No 2º CEB a álgebra aparece como tema isolado aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade direta como igualdade entre duas razões.

Assim, segundo o PMEB (2007), o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta, tema formalizado no 6.º ano, tem início no 1.º ciclo, no tema números e operações, tendo como objetivo específico resolver problemas que envolvem o raciocínio proporcional, sugerindo para tal o uso de tabelas na resolução desses problemas. Desta forma, o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta inicia-se com o trabalho das estruturas multiplicativas e com os números racionais. Segundo uma entrevista dada por Terezinha Nunes (2002), em contexto escolar o raciocínio proporcional constrói-se "quando se ensina a multiplicação e o raciocínio de correspondência e se estimula na mente do aluno uma representação para a relação entre variáveis". Nesta questão a autora dá o exemplo "Vai haver uma festa para 15 convidados. Cada um vai ganhar três balões. Quantos balões devem ser comprados?". Segundo esta autora, este problema implica uma só operação, mas numa conceção mais moderna é criada uma representação em forma de tabela com uma variável de cada lado. Ora, assim os alunos percebem que na relação entre as duas variáveis existe algo que se mantém.

Tendo em conta que a capacidade de raciocinar proporcionalmente influencia a aprendizagem de outros conceitos matemáticos estudados no ensino básico (por exemplo a divisão, a multiplicação, equivalência de frações, semelhança geométrica, e muitos outros) e de outros conceitos estudados no ensino secundário, nomeadamente a trigonometria, e também nos conceitos estudados noutras áreas, como a física, geografia ou artes, cabe ao professor selecionar tarefas que permitam ao aluno a exploração de regularidades numéricas para distinguirem situações onde existe uma relação de proporcionalidade direta de situações onde não existe. Segundo o NCTM (2007) na geometria, ao explorar figuras parecidas, os alunos desenvolvem a noção de semelhança ao perceberem que uma é maior ou menor que a outra, ou seja que houve figuras que foram ampliadas e outras foram reduzidas. O NCTM (2007, p. 192) propõe a seguinte tarefa: "Constrói um triângulo que possua um ângulo reto e dois lados de igual comprimento. Consegues construir mais do que um triângulo com estas características? Se sim, qual é a relação entre esses triângulos?", os alunos ao construírem os triângulos percebem, que embora os triângulos não sejam do mesmo tamanho, relacionam-se uns com os outros, ou seja, um deles é uma ampliação ou uma redução do outro, assim sendo os triângulos são semelhantes. Segundo o NCTM (2007) "Muito embora os alunos não desenvolvam uma compreensão completa do conceito de semelhança antes do 6.º ano de escolaridade, altura em que se debruçam sobre a proporcionalidade direta, no 3.º, 4.º e 5.ºanos poderão começar a pensar na semelhança em termos de figuras que se relacionam através das transformações de ampliação ou redução" (p. 193). Enquanto os alunos desenham e discutem as formas alargam o seu vocabulário e desenvolvem conceitos relacionados com a geometria.

O Curriculum Nacional do Ensino Básico destaca a especificidade da matemática como sendo a "ciência das regularidades, da linguagem dos números, das formas e das relações" (p. 58), mais adiante, no domínio dos Números e Cálculo refere que a competência matemática inclui "a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas que envolvem divisores e múltiplos de números ou implicando processos de contagem." (p. 60).

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), referem que se deve dar oportunidade aos alunos de trabalhar com situações que envolvam o raciocínio proporcional, as quais devem ser de natureza geométrica e numérica, sugerindo que situações de semelhança de figuras e escalas podem ser profícuas na aplicação do raciocínio proporcional, permitindo uma relação com o raciocínio espacial. Também realça que "a capacidade de utilizar o raciocínio proporcional corresponde a uma fase importante do desenvolvimento cognitivo, por ser um ponto culminante das aprendizagens da matemática no ensino elementar e uma base fundamental para o estudo da matemática no ensino secundário." (p. 55). Também

Lesh, Post e Behr (1988) partilham a mesma ideia “acreditamos que o raciocínio proporcional é o culminar da aritmética elementar e o alicerce de tudo o se segue.” (p. 4).

2.3. Definição de raciocínio proporcional

O raciocínio proporcional não é um tema moderno, existe há muitos anos e ao longo deste tempo tem-nos mostrado, cada vez mais, a sua importância quer em situações práticas do quotidiano como em matemática. Pesquisas realizadas por vários autores concluem que o raciocínio proporcional é utilizado de forma intuitiva, por adultos e crianças quando resolveram problemas que envolvem este tipo de raciocínio. Por exemplo, quando o aluno vai ao bar da escola ou a uma pastelaria comprar um bolo, o seu preço vai variar consoante a quantidade comprada, se a quantidade duplicar o preço duplica, se a quantidade triplicar o preço também triplica e assim sucessivamente, dizemos que as grandezas quantidade e preço, são duas grandezas diretamente proporcionais. Segundo uma entrevista que Terezinha Nunes concedeu em 2002, destaca que esta relação entre a quantidade e o preço do pão é a origem do raciocínio multiplicativo e que a criança consegue resolver este tipo de problema desde os 6 anos de idade, no entanto cabe à escola desenvolvê-lo através de representações em que a criança compreenda o conceito de proporção. Por outras palavras, embora este raciocínio seja desenvolvido fora do contexto escolar, envolve conceitos que devem ser trabalhados dentro da sala de aula.

A expressão raciocínio proporcional é utilizada para descrever situações matemáticas que envolvem relações proporcionais. Silvestre e Ponte (2012) contrariando a ideia de que a resolução de problemas que envolvem relações proporcionais têm sempre de ser resolvidos através da regra de três simples, não garantindo a compreensão do significado das relações envolvidas no conceito, dão enfase às relações multiplicativas, referem que as relações de proporcionalidade direta têm uma natureza multiplicativa. Referindo Vergnaud (1983), Silvestre e Ponte (2012) mencionam que nas situações que envolvem uma multiplicação ou divisão ou ambas as operações, são identificadas três classes, sendo uma delas o isomorfismo de medidas. Nesta as transformações que agem dentro das variáveis (sentido de covariação) ou entre variáveis (sentido de invariância), mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos, como mostra a figura 8.

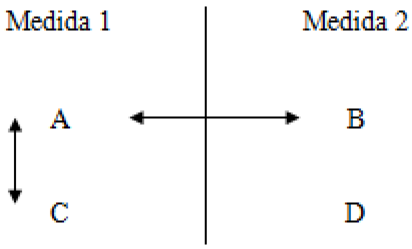


Figura 8 - Isomorfismo de medidas

Ponte, Silvestre, Garcia e Costa (2010) especificam esses dois aspetos (figura 9 e 10) das relações multiplicativas que se encontram numa relação de proporcionalidade:

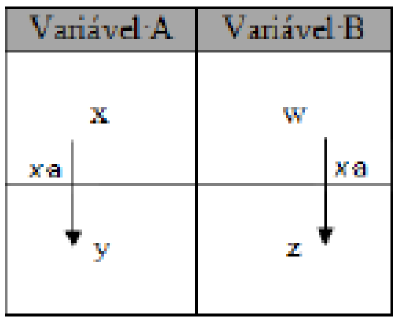


Figura 9 - Covariação de grandezas (representadas por variáveis)

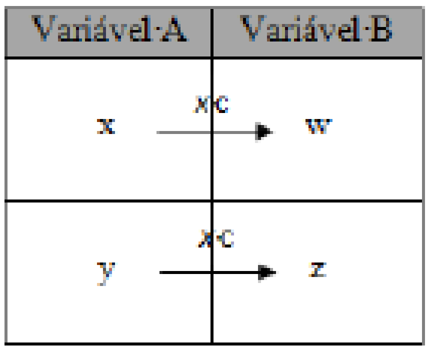


Figura 10 - Invariância entre grandezas (representadas por variáveis)

Analogamente, também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que a característica fundamental do raciocínio proporcional deve envolver uma relação entre duas relações, ou seja, relações de segunda ordem, "A compreensão da relação de proporcionalidade implica que o aluno seja capaz de usar estratégias multiplicativas (reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos de uma razão e aplicar aos termos da segunda ou reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos correspondentes de duas razões que se alarga aos outros dois termos correspondentes) " (p. 54).

Ponte, Silvestre, Garcia e Costa (2010) defendem que a proporcionalidade direta deve ser explorada intuitivamente como função linear desde os primeiros anos de escolaridade, adquirindo precedência sobre a noção de igualdade entre razões (proporção), assim o conceito de proporcionalidade direta deve ser apresentada como uma função linear dada por $y = mx$, pois, a essência da proporcionalidade está nas relações multiplicativas.

Todavia, para este conceito poder ser aplicado no quotidiano precisa de um conhecimento conceptual. Yetkiner e Capraro (2009)[3] referem que a aprendizagem de conhecimento processual, ou seja, o algoritmo, precisa de ser adiada até que os alunos tenham apreendido o sentido das proporções e relações. Estes autores também referiram, com base numa pesquisa realizada e analisada por Ball (1990) que todos os alunos conseguiram resolver os problemas utilizando o algoritmo, mas poucos foram capazes de desenvolver um raciocínio adequado.

Na literatura existem várias definições para o raciocínio proporcional, segundo Lesh, Post e Behr (1988), não se limitando a resolver problemas utilizando algoritmos, consideram o raciocínio proporcional uma forma de "raciocínio matemático que envolve o sentido de covariação e possibilita múltiplas comparações, requerendo a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação, relacionados com inferência e predição e envolvendo pensamento qualitativo e quantitativo." (p. 1). Efetivamente, ao comparar duas grandezas, compreende-se que se relacionam e variam conjuntamente. Em relação ao pensamento qualitativo, este é mais amplo que o quantitativo, pois, possibilita uma análise dos resultados encontrados, fazendo com que o aluno se questione se existe alguma lógica em relação ao enunciado do problema. Contudo este, ainda permite fazer

[3] Citado por Jessica Korth (2010)

uma análise prévia do problema e elaborar conclusões a partir de comparações realizadas entre duas grandezas, antes da realização dos cálculos para a obtenção de uma resposta. Quanto ao pensamento quantitativo, este está relacionado com a parte operatória, ou seja, com a destreza de cálculo, a fim de determinar uma solução para o problema em questão.

Ainda segundo Lesh, Post e Behr (1988) o raciocínio proporcional envolve aspetos matemáticos, onde podemos considerar a noção de proporcionalidade direta que se molda pela equação $y = mx$, considerando o caso da proporcionalidade direta, ou $y=m/x$, considerando o caso da proporcionalidade inversa, e os aspetos psicológicos que estão relacionados com a capacidade mental para realizar operações.

Spinillo (2002), baseando-se em experiências, explicita que o raciocínio proporcional consiste na habilidade em estabelecer relações de primeira e segunda ordem. As relações de primeira ordem podem ser do tipo parte-parte que são estabelecidas entre partes diretamente comparáveis, por exemplo, considerando um copo com água, é a relação da parte com água com a parte vazia. Também podem ser do tipo parte-todo que são estabelecidas entre partes que não são diretamente comparáveis, por exemplo, no caso do copo de água, é a relação entre a parte com água e o volume total do copo. As relações de segunda ordem referem-se à relação obtida de duas relações de primeira ordem. Ainda referente às relações de primeira ordem é de referir a estratégia da "metade" (menos que metade, mais de metade, metade cheio e metade vazio), para fazer julgamentos proporcionais, pois também segundo esta autora, desempenha um papel importante na compreensão inicial de proporção. As relações de primeira ordem são o foco central do raciocínio proporcional, visto que a partir destas surge a representação $A/B = C/D$. Nas relações de segunda ordem os alunos podem estabelecer relações entre elementos do mesmo par, ou seja, entre o numerador e denominador; entre os numeradores e denominadores do primeiro e segundo par; ou entre os primeiros e os segundos valores de cada par, ou seja os extremos e os meios. Esta perspetiva encara a proporção, não como um todo, mas como duas quantidades que estão ligadas através de uma situação ou de uma comparação. Além de estabelecer relações entre relações o raciocínio proporcional ainda requer o reconhecimento de equivalência entre situações distintas e o pensamento em termos relativos e não em termos absolutos.

Já Lamon (2005)[4] refere, que o raciocínio proporcional "está associado à capacidade de analisar relações entre grandezas, o que implica compreensão da relação constante (invariância) e a noção de que ambas variam em conjunto (covariação)", ou seja, para esta autora o raciocínio proporcional não significa proporcionalidade, mas sim a condição necessária para a compreensão de situações que envolvem proporcionalidade. Pois, na equivalência entre razões, prevê-se que os alunos já tenham adquirido a capacidade de perceber que existe, ao mesmo tempo, algo que muda (quantidades absolutas) e algo que se mantém constante (na mesma proporção). Do ponto de vista desta autora uma das dificuldades que os alunos podem ter é não reconhecer a natureza multiplicativa das situações proporcionais, uma vez que estes têm dificuldades em compreender a diferença entre adicionar e multiplicar e também as situações em que estas operações se aplicam.

2.4. Desenvolvimento do raciocínio proporcional

De acordo com os seguidores de Piaget, as crianças numa fase inicial do desenvolvimento do raciocínio proporcional tendem a utilizar um raciocínio aditivo na forma de $A - B = C - D$. No entanto Lesh, Post e Behr (1988), para que não se coloque em causa o seu significado matemático, refere que se deve restringir a expressão raciocínio proporcional a vários aspetos das expressões multiplicativas entre expressões racionais.

Contrariando a teoria de Piaget e outros psicólogos do desenvolvimento, que expõem o raciocínio proporcional como uma capacidade global ou a manifestação de uma estrutura cognitiva geral, outros autores referem que o raciocínio proporcional é caraterizado por um gradual desenvolvimento da competência local, do que por uma estratégia global. De acordo com Piaget[5], o raciocínio proporcional desenvolve-se a partir de uma estratégia de natureza aditiva (estratégia compensatória global), passando por uma estratégia multiplicativa sem generalização a todos os casos, até à estruturação final da lei das proporções. No entanto, constatou-se que, pela diversidade de tarefas ou pelo grau de complexidade ao longo da tarefa, o raciocínio dos alunos nem sempre obedece a esta estrutura. Logo, é mais correto afirmar que o desenvolvimento conceptual do domínio do raciocínio proporcional dos alunos é caraterizado por um gradual desenvolvimento da

[4] Citado por Costa e Ponte (2008)
[5] Citado por Lesh, Post e Behr (1988)

competência local, do que por uma estratégia global. De acordo com investigações realizadas sobre este tema, os psicólogos do desenvolvimento, segundo Lesh, Post e Behr, (1988) referem diversos estádios pelos quais os alunos passam.

I) Os alunos ignoram parte dos dados, ao compararem os numeradores de uma proporção equação;
II) Observam relações, de forma qualitativa, entre os quatro fatores de uma proporção;
III) A quantificação, inicialmente envolve quase sempre mais relações aditivas que multiplicativas;
IV) Numa primeira fase o uso do raciocínio multiplicativo baseia-se numa estratégia de acumulação;
V) "Proporções lógicas" de Piaget que informa que as relações multiplicativas entre dois termos são identificadas, sendo a relação então aplicada aos outros dois termos.

Langrall e Swafford, (2000)[6] expõem quatro competências essenciais do raciocínio proporcional que se não forem adquiridas podem proporcionar dificuldades no raciocínio do aluno.

- Reconhecimento da diferença entre as mudanças absolutas ou aditivas e as relativas ou multiplicativas;
- Reconhecimento de situações em que usar a razão é adequado;
- Compreensão de que as quantidades que constituem uma razão covariam para que a relação entre elas não se altere;
- Capacidade para construir, de forma crescente, as estruturas unitárias complexas.

Os mesmos autores Langrall e Swafford (2000) citados por Costa (2007, p.12) definiram quatro níveis, com base nas respostas dadas num estudo realizado com alunos do 3º ciclo:

- Nível 0 – Sem raciocínio proporcional: os alunos não são capazes de reconhecer a relação multiplicativa, fazem comparações aditivas; usam aleatoriamente os números e/ou as operações; não relacionam as duas grandezas;

[6] Citados por Costa (2007)

- Nível 1 – Raciocínio informal sobre as situações proporcionais: os alunos usam modelos, figuras, ou material manipulável, para compreenderem as situações; fazem comparações qualitativas.
- Nível 2 – Raciocínio quantitativo: os alunos usam unidades compostas; encontram e usam razão unitária; identificam e usam fator escalar ou fazem tabelas; usam frações equivalentes; constroem duas grandezas;
- Nível 3 – Raciocínio proporcional formal: os alunos constroem a proporção e usam o produto cruzado ou equivalência de frações; compreendem plenamente a invariância e a covariância das relações.

Silvestre e Ponte (2009) consideram que a capacidade de raciocínio proporcional envolve três aspetos:

- Distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são;
- Compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta;
- Resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afetado pelos dados numéricos, contexto e representação.

2.5. Dificuldades no raciocínio proporcional

Tendo em conta a importância do raciocínio proporcional, muitas investigações têm sido realizadas com a finalidade de contribuir com alternativas para uma melhor compreensão do tema e para minimizar as dificuldades sentidas tanto pelos alunos como pelos professores.

Misailidou e Williams (2004), citados por Silvestre (2010), referem que à dificuldade de aprender os conceitos de razão deve-se juntar a dificuldade de os ensinar. Esta opinião é partilhada por Olivo e Godino (2010) quando refere que no ensino e aprendizagem da proporcionalidade direta, tarefa cuja responsabilidade recai sobre os professores, parece que estes ainda não atingiram os níveis suficientes para assegurar uma aprendizagem com compreensão. O pouco conhecimento de alguns professores em relação à estrutura do raciocínio proporcional tem limitado o desenvolvimento deste raciocínio nos alunos. Várias investigações citadas por este autor, concluem que nos ciclos superiores, nomeadamente no terceiro ciclo os alunos têm dificuldade em resolver problemas que envolvem o raciocínio proporcional, o que dificulta a tarefa dos professores em ajudar os seus alunos, dessa forma Dole e Shield (2008) citados por Olivo e Godino (2010) reconheceram a necessidade de reforçar a formação dos professores de forma a promover competências para abordar este problema.

Segundo Lesh, Post e Behr (1988) as pessoas que resolvem problemas sobre proporções não usam o raciocínio proporcional, ou seja, normalmente para resolver estes problemas é usada a estratégia do "produto cruzado". Contudo, as investigações realizadas provam que este método é mal compreendido pelos alunos e usado mais para limitar o raciocínio proporcional. Analogamente, Silvestre (2006) refere que uma das consequências indesejáveis deste tipo de raciocínio matemático é a mecanização dos procedimentos e dos algoritmos utilizados, sem desenvolver a compreensão da estrutura matemática.

De um modo geral, todos os autores estão de acordo quanto ao grau de dificuldade deste tipo de raciocínio. Silvestre (2006) citando Smith III (2002) refere que "não existe no contexto da matemática escolar elementar uma área que seja tão rica matematicamente, tão complicada em termos cognitivos e tão difícil de ensinar como as frações e a proporcionalidade, na medida que todas estas entidades expressam relações matemáticas." (p. 33). Do mesmo modo, Lesh, Post e Berh (1988) referem que "uma dificuldade fundamental para os psicólogos e educadores é que os matemáticos raramente se preocupam com o problema de fornecer definições rigorosas que destacariam muitas características das tarefas que são significativas do ponto de vista educacional e psicológico" (p. 23). Estes autores destacam ainda a necessidade de haver concordância na investigação em educação matemática e na instrução.

Na nossa sociedade atual muitos jovens continuam a demonstrar muita dificuldade na interpretação e compreensão de enunciados ou textos escritos, ou seja, na linguagem escrita, o que muitas vezes dá origem a dificuldades na compreensão de determinado conceito. Além disso, o que se verifica nas escolas é a desconexão com situações do dia-a-dia, ou seja, muitas vezes são propostos problemas aos alunos que não se aplicam na realidade, o que muitas vezes também origina dificuldades na interpretação dos enunciados. A exploração do raciocínio proporcional é fundamental na resolução de problemas em muitas áreas do saber, em situações do dia-a-dia e até mesmos em outros temas dentro da própria matemática. Estas conexões permitem "[…] que os alunos vejam a matemática como um corpo unificado de conhecimentos, em vez de um conjunto complexo de conceitos, procedimentos e processos isolados". (NCTM, 2007).

Lamon (2005), citado por Costa e Ponte (2008), considera que uma das dificuldades que os alunos podem ter é não reconhecer a natureza multiplicativa das situações proporcionais, uma vez que estes têm dificuldades em compreender a diferença entre adicionar e multiplicar e também as situações em que estas operações se aplicam. A compreensão das relações proporcionais de forma significativa, constituem suportes resistentes na transposição didática para a aprendizagem de conceitos relacionados com outras áreas das ciências facilitando a articulação curricular.

2.6. Estratégias utilizadas no raciocínio proporcional

Após uma análise das estratégias utilizadas pelos alunos em problemas que envolvam raciocínio proporcional, Costa (2007) verificou que antes do ensino formal da proporcionalidade direta os alunos manifestaram "capacidade de resolver de forma correta pelo menos certos tipos de problemas que envolvam o raciocínio proporcional", concluindo que "não precisam da aprendizagem formal para realizar algumas tarefas" (p. 100).

A compreensão das relações existentes entre as grandezas de uma proporção que carateriza o raciocínio proporcional pode-se manifestar por meio das estratégias de resolução que são utilizadas para resolver os problemas que envolvam proporcionalidade direta. Singer, kohn e Resnick (1997), citados por Costa (2007), consideram dois tipos de raciocínio: escalar e funcional, segundo estes autores, tem a ver com a capacidade de relacionar sobre relações multiplicativas e também com a capacidade de raciocinar dentro e entre os diferentes espaços de medida envolvidos. Deste modo, o raciocínio escalar ocorre quando se fazem transformações dentro de cada espaço de medida, assim podemos dizer que o aluno utilizou uma estratégia escalar. Por exemplo, se 2 cadernos custam 3 euros então 6 cadernos custarão 9 euros, ora se o número de cadernos triplica o preço também irá triplicar. Quanto ao raciocínio funcional é aquele que ocorre quando a transformação é feita diretamente entre os dois espaços de medida, usando o exemplo anterior, o aluno ao usar o raciocínio funcional teria visto que 1 caderno custava 1.5 euro, então a partir daí calculava o preço de qualquer número de cadernos, logo utilizou uma estratégia funcional. Estes autores referem que pelo facto de muitos problemas que envolvem o raciocínio proporcional poderem ser realizados através de adições sucessivas, os alunos tendem a resolver os problemas, recorrendo a estratégias escalares, construindo desse modo raciocínios escalares. Também Lamon (1994) citado por Ponte, Silvestre, Garcia e Costa (2010) partilha as mesmas estratégias classificando-as como dentro (estratégia escalar) e entre (estratégia funcional).

Os mesmos autores (p. 5) classificam as estratégias decorrentes do raciocínio multiplicativo em alunos com idades entre os 11 e 16 anos em:

Razão unitária, conhecida por "quantos para um" estratégia intuitiva, usada desde os primeiros anos de escolaridade em problemas de multiplicação.
Fator de mudança ou fator escalar, conhecida por "tantas vezes como", condicionada a aspeto numéricos do problema.
Comparação das razões, associada a problemas de comparação, que permite comparar as razões unitárias através de duas divisões.
Algoritmo do produto cruzado, conhecida por regra de três simples, é um processo mecânico utilizado pela maior parte dos alunos para resolverem problemas de proporcionalidade, desprovido de significado.

Segundo o PMEB o ensino da geometria do 1.º e 2.º CEB deve ter por base o estabelecimento de estimativas de medida de grandezas. Segundo Ponte e Serrazina (2000) "a estimação desenvolve-se através de atividades práticas de medida de objetos reais para que o erro cometido vá diminuindo com o número de estimações realizadas" (p. 201). Estes autores ainda referem que se deve praticar estimações de comprimentos, alturas, larguras e distâncias. Além disso, deve-se desenvolver estratégias de estimação, e para isso apresentam algumas dessas estratégias (p. 202):

- Visualizar a unidade de medida que se vai usar na estimação e repeti-la mentalmente sobre o objeto a medir;
- Comparar o comprimento a medir com o comprimento de um objeto conhecido;
- Servir-se de objetos iguais regularmente distribuídos ao longo de um comprimento;
- Achar metades. Se o comprimento a estimar é demasiado grande estima-se a metade. Se esta ainda for grande, estima-se a metade e assim enquanto for preciso.

II – Parte Empírica

Capítulo 3

Metodologia de investigação

Neste capítulo foi descrita a metodologia adotada neste estudo, investigação qualitativa na modalidade de investigação ação. Organizou-se em cinco tópicos, sendo o primeiro as opções metodológicas. No segundo tópico fez-se um breve resumo das técnicas utilizadas na recolha de dados. Os tópicos seguintes apresentam a caraterização do contexto pedagógico e da turma que participou neste estudo e por último as fases da investigação.

3.1. Opções metodológicas

Toda a investigação em educação tem como ponto de partida uma problemática que tem como resposta um modelo de investigação que deve ser estabelecido, de acordo com as características da mesma.

Investigação qualitativa

Assim sendo, tendo em conta que este estudo pretende identificar e descrever de que forma os alunos utilizam o raciocínio proporcional, optou-se por uma abordagem de natureza qualitativa. Para Bogdan e Biklen (1994) as cinco características de uma investigação qualitativa são as seguintes:

1) A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Os investigadores, normalmente dedicam grande parte do seu tempo às escolas e aos alunos, o que permite um melhor conhecimento do ambiente, onde se proporciona a investigação. Embora os investigadores utilizem equipamentos, tais como: vídeo ou áudio, a maior parte dos dados recolhidos é feito através do contato direto.
2) É descritiva (normalmente os dados apresentados são em forma de palavras ou esquemas), "a palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo dos dados como para a disseminação dos resultados." (p. 49)

3) O investigador interessa-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos. Respondem a questões como: de que forma as pessoas assimilam os significados? Este tipo de estudo centra-se na forma como as definições se formam na mente dos alunos.
4) A análise de dados é feita de forma indutiva (o objetivo não é confirmar hipóteses prévias, apenas procurar identificar aspetos específicos nos dados recolhidos, contributos para o estudo. "O processo da análise dos dados é como um funil: as coisas estão abertas no inicio (ou no topo) e vão tornando-se mais fechadas e especificas no extremo." (p. 50)
5) O significado é vital na abordagem qualitativa. As questões feitas durante a investigação têm o objetivo de perceber o modo como interpretam as suas experiências, ponto de partida para os investigadores estabelecerem as suas estratégias.

Estas características adequam-se a este estudo, uma vez que:

1) A fonte direta dos dados é o local onde se realizou a PPSB 2 com a mesma turma (5.º B) e os dados correspondem às produções orais e escritas realizadas pelos alunos, às notas de campo realizadas pela investigadora e às observações efetuadas pela investigadora e colegas.
2) É descritiva porque os dados recolhidos foram as notas de campo que são descrições das observações efetuadas.
3) Este estudo tem como finalidade a análise dos procedimentos dos alunos em tarefas de natureza exploratória.
4) A finalidade deste estudo é identificar alguns aspetos do raciocínio proporcional, como as dificuldades, os procedimentos e as fases de desenvolvimento.
5) As questões feitas durante a investigação têm como objetivo de perceber o modo como interpretam as suas experiências e detetar algumas dificuldades.

A investigação qualitativa centra-se na compreensão e na análise de problemas que são inerentes a certos comportamentos apresentados pelos alunos. Segundo Bogdan e Biklen (1994) "a abordagem à investigação qualitativa não é feita com o objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. Privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspetiva dos sujeitos de investigação." Desta forma, a validade dos instrumentos, assim como a dimensão dos dados recolhidos não representam qualquer interesse ou preocupação para este método. Pois, neste método o investigador é o “instrumento” de recolha de dados e a validade desses dados depende do investigador. É sobre o investigador que recai a responsabilidade do discurso dos alunos e também dos objetivos da investigação.

Uma das estratégias que melhor identificam uma investigação qualitativa é a observação participante. O investigador ganha a confiança das pessoas que pretende estudar, observa-as e faz um registo escrito do que observa, completando com outro tipo de dados, por exemplo, fotografias.

A investigação qualitativa pode ser muito vantajosa para o ensino, pois pode fornecer informação acerca do ensino e da aprendizagem através da observação pormenorizada e da interação com os alunos em causa. Essas informações permitem fazer uma análise do ensino e da aprendizagem, como é que os alunos apreendem certos conceitos e que dificuldades são sentidas na sua aprendizagem.

Investigação – Ação

A investigação-ação (IA) apresenta-se como a metodologia de investigação mais frequente, impõe-se como um projeto de ação no qual se adotam estratégias com vista a satisfazer as necessidades do professor face às situações educativas em estudo.

Na literatura não é possível encontrar uma definição única, existem várias aceções, no entanto Cohen e Manion (1989), citados por Bell (1997), referem que é um procedimento fundamental com o propósito de lidar com um problema concreto localizado numa situação imediata. Estes autores referem que uma das características da IA é o facto de o trabalho nunca acabar, pois continua-se a rever, a avaliar e a melhorar a prática. Também Coutinho *et al* (2009) descrevem esta atividade como uma família de metodologias de investigação que envolvem simultaneamente ação (mudança) e investigação (compreensão), baseando-se num processo cíclico ou em espiral que alterna entre ação e reflexão crítica, em que os métodos, os dados e a interpretação obtida no ciclo anterior são aperfeiçoados nos ciclos seguintes. Para tal, ainda segundo os mesmos autores existem várias perspetivas, sempre dependendo do objeto em estudo, “o essencial na IA é a exploração reflexiva que o professor faz da sua prática, contribuindo dessa forma não só para a resolução de problemas como também (e principalmente) para a planificação e introdução de alterações nessa mesma prática" (p. 360). As estratégias da IA são semelhantes às da investigação qualitativa e por esse motivo esta é apresentada como uma modalidade da investigação qualitativa.

Na IA observamos um conjunto de fases: planificação, ação, observação (avaliação) e reflexão (teorização) que se desenvolvem de forma contínua em movimento circular, uma vez que esta metodologia visa uma melhoria de resultados o investigador deve explorar e analisar as diversas interações e proceder a reajustes, dando lugar a novos ciclos que, por sua vez desencadeiam novas experiências, como se pode verificar na figura 11:

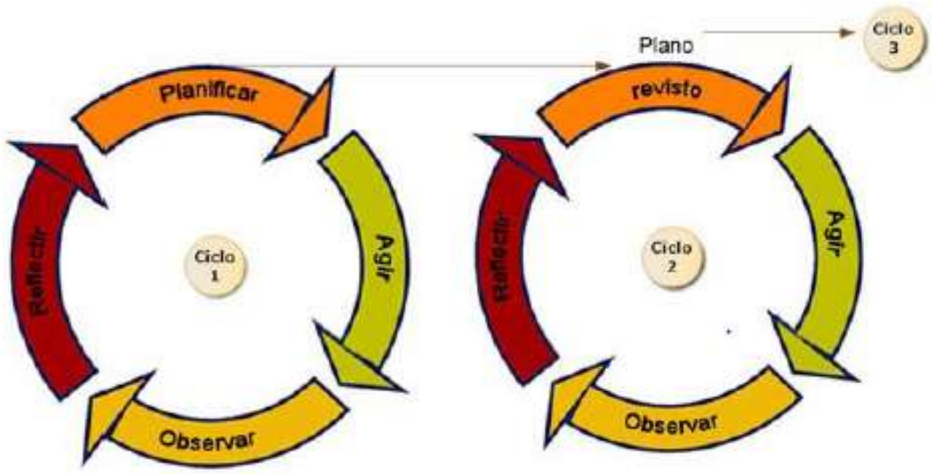


Figura 11 - Ciclos da IA, segundo Coutinho et al (2009, p. 366)

Num primeiro momento os grupos de trabalho que desenvolvem um plano de ação devem ser capazes de se adaptar às situações imprevistas, com vista a atingir a melhoria de uma determinada prática. Em seguida, o grupo avança para a implementação do plano de forma intencional e controlada. Durante a ação os elementos do grupo, investigadores, vão observando e recolhendo dados, evidências, utilizando para isso técnicas e instrumentos de recolha de informação. Na fase posterior à ação os investigadores refletem sobre os dados recolhidos, ou seja, sobre os efeitos da ação. Com base no trabalho realizado revêm o plano partindo para um novo ciclo de IA.

Efetivamente, Latorre (2003), citado por Coutinho (2008) refere que a principal vantagem da IA é a melhoria da prática, a compreensão da mesma e a melhoria da situação onde tem lugar a prática. Coutinho *et al* (2009) adiantam que a intenção fundamental da IA não é tanto gerar conhecimento, mas sobretudo questionar as práticas sociais e os valores que as integram com a finalidade de explicá-los, "um instrumento poderoso para reconstruir as práticas e os discursos" (p. 363). Simões (1990), citado em Coutinho (2005), afirma que "o resultado da investigação terá sempre um triplo objetivo: produzir conhecimento, modificar a realidade de transformar os atores" (p. 222).

Cohen e Manion (1994) e Descombe (1999), citados por Coutinho (2008), apontam algumas características que se moldam pelo seu carater prático que se rege pela necessidade de resolver problemas, assim sendo a IA é:

Participativa e colaborativa: implica todos os intervenientes no processo. O investigador não é um agente externo que realiza investigação com pessoas, é um co investigador com e para os interessados nos problemas práticos e na melhoria da realidade.

Prática e interventiva: não se limita ao campo teórico, a descrever uma realidade. Segundo Coutinho (2005) a ação tem de estar ligada à mudança e é sempre uma ação deliberada.

Cíclica: porque a investigação envolve uma espiral de ciclos, nos quais as descobertas iniciais geram possibilidades de mudança, que são implementados e avaliados como introdução do ciclo seguinte. Segundo Coutinho (2005) temos um permanente entrelaçar entre a teoria e a prática.

Critica: a comunidade crítica de participantes não procura apenas melhores práticas no seu trabalho, dentro das restrições sociopolíticas dadas, mas também, atuam como agentes de mudança, críticos e autocríticos das eventuais restrições.

Auto-avaliativa: as modificações são continuadamente avaliadas, numa perspetiva de adaptabilidade e de produção de novos conhecimentos.

Coutinho (2005, p. 223) com base em alguns autores considera que a IA trouxe à investigação em ciências da educação os seguintes contributos:

- Uma nova forma de investigar que dá maior relevo ao social, pondo o investigador e os participantes no mesmo plano de intervenção;

- A combinação de métodos quantitativos e qualitativos, originando novas técnicas de recolha de dados, tais como a entrevista narrativa e investigação biográfica;
- A disseminação do conceito de prático reflexivo na formação de professores, bem como noutras áreas profissionais.

Desta forma, podemos concluir que a IA é uma metodologia de investigação para a educação.

3. 2. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados é um procedimento da investigação empírica, ao qual compete selecionar técnicas e instrumentos de recolha de dados adequados, a fim de nos ajudarem na análise e nas conclusões finais pretendidas. Antes de referir as técnicas e instrumentos de recolha de dados, apraz diferenciar estes dois conceitos. Segundo o dicionário de língua portuguesa (infopédia) entende-se como técnicas, um conjunto de procedimentos bem definidos destinados a produzir certos resultados na recolha e tratamento dos dados provenientes da atividade de investigação. Já instrumentos de recolha de dados (infopédia) é "tudo o que serve para executar algum trabalho ou fazer alguma observação". Hébert, Goyette e Boutin (1990) mencionam três grandes grupos de técnicas, as quais foram utilizadas nesta investigação: a observação, que pode assumir uma forma direta sistemática ou uma forma participante; a análise documental, espécie de análise de conteúdo que incide sobre documentos relativos a um local ou a uma situação e o inquérito, que pode ser oral (entrevista) ou escrito (questionário).

Assim, durante a implementação das tarefas procurou-se recolher informações em todas as sessões dinamizadas, com o objetivo de responder às questões, referidas na parte introdutória desta investigação.

Técnicas	Instrumentos	Momentos de aplicação	
Observação participante	Notas de campo	Na primeira e segunda parte da tarefa	Entre Abril e Maio de 2013
Análise documental	Produções orais	Em todas as sessões implementadas.	
	Produções escritas	Na terceira e quarta parte da tarefa	
Inquérito	Questionário	No fim de implementadas todas as tarefas - 31 de maio	

Tabela 1 - Tabelas das técnicas e instrumentos utilizados na recolha de dados

Observação

A observação pode ter duas formas: sistemática e participante. Na observação sistemática os comportamentos que se pretendem observar encontram-se pré-definidos pelo observador. A observação participante é menos sistemática, o observado não pode ou não quer antever os acontecimentos que serão objeto de estudo.

Neste trabalho a observação realizada é participante, embora já se saiba previamente que se vai analisar o raciocínio proporcional dos alunos, não sabemos que tipo de estratégias eles vão utilizar, nem as dificuldades que vão apresentar ou em que fase do raciocínio proporcional eles se encontram. Este tipo de observação é dinâmica e envolvente, pois é realizada em contacto direto com os participantes de estudo, sendo o próprio investigador instrumento de pesquisa, permitindo uma análise indutiva e compreensiva. A observação no início apresenta-se mais descritiva, pois o investigador procura obter uma perspetiva geral das interações e do que acontece em campo, tornando-se mais focalizada para a fase final, tendo como foco principal os acontecimentos ou situações. Referindo Hébert, Goyette e Boutin (1990), “a observação participante é portanto uma técnica de investigação qualitativa adequada ao investigador que deseja compreender um meio social que, à partida, lhe é estranho ou exterior e que lhe vai permitir integrar-se progressivamente nas atividades das pessoas que nele vivem." (p. 155)

As notas de campo são um instrumento privilegiado na observação participante, este carateriza-se por relatos escritos do que se vê, ouve, experiencia e pensa, assumindo assim uma natureza descritiva e reflexiva. A parte descritiva das notas de campo consiste na transcrição das ideias, situações, estratégias, dificuldades, conversas, enfim tudo o que o investigador considerar pertinente para o seu estudo. A parte reflexiva deste instrumento consiste na opinião do investigador, nas suas ideias e preocupações. Estes relatos foram realizados após cada intervenção, em forma de texto, manuscrito ou em computador, para facilitar a análise de dados, pois estes registos servem como auxiliar de memória.

Análise documental

A análise documental segundo Hébert, Goyette e Boutin (1990) "trata-se de uma técnica que tem, com frequência uma função de complementaridade na investigação qualitativa, isto é que é utilizada para *triangular* os dados obtidos através de uma ou duas outras técnicas" (p. 144). Todo o processo de investigação consiste numa recolha e tratamento de informações que vão acrescentar algo ou fundamentar as produções iniciais do investigador sobre o tema em estudo. Esta técnica vai contribuir para uma análise mais cuidadosa dos dados recolhidos produzidos pelos alunos. Coutinho *et al* (2009) distingue dados primários e secundários. Os primários referem-se aqueles que se recolhem através de outras técnicas de recolha de dados, ou seja produzidos pela própria investigação. Por exemplo, os dados produzidos pelo questionário feito aos alunos e as suas produções escritas e orais que foram aplicados neste estudo. Os dados secundários são definidos como as informações já produzidas que o investigador recolhe, por outras palavras é uma informação nova fundamentada no estudo das fontes de informação primária.

Inquérito

Os inquéritos têm como instrumentos de recolha de dados as entrevistas ou os questionários. Este último é estandardizado tanto no texto como nas questões utilizadas, estas devem ser colocadas da mesma forma em todos os textos, para poder ser feita uma comparação. O objetivo dos inquéritos por questionário é obter de forma ordenada informação sobre um determinado grupo a investigar, ou seja, aquilo que pensam, fazem, sentem e os motivos dos seus pensamentos, atitudes ou sentimentos. Os questionários, instrumento utilizado nesta investigação, podem ser de natureza aberta, questões que permitem a liberdade de expressão do inquirido e tem como vantagem a originalidade, a variedade de respostas e uma informação diversificada, a principal desvantagem é a dificuldade de organizar a informação, devido à variedade de respostas. Também podem ser de natureza fechada, o inquirido apenas seleciona a opção que se adequa à sua opinião, as suas vantagens são a rapidez na resposta, a uniformidade e a facilidade de organização da informação, a principal desvantagem é a falta de originalidade. Este instrumento, como foi implementado no final de todas as tarefas e tinha como objetivo saber a opinião dos alunos sobre as atividades realizadas, optou-se por um questionário de natureza aberta, justamente para permitir que cada aluno escreva o que sente e pensa na realidade mostrando originalidade nas suas respostas.

3.3. Caracterização do contexto pedagógico

Esta investigação desenvolveu-se no Colégio D. José I, onde a PPSB 2 foi desenvolvida.

Figura 12 - Fotografia do Colégio D. José I

Caracterização do meio local

Este colégio localiza-se na freguesia de Santa Joana, que foi criada em 1985. Em termos económicos, esta freguesia continua com alguma atividade agrícola, contudo, destacam-se as empresas dos setores secundário e terciário. O Colégio contribui, de certa forma, na economia da freguesia. Esta possui também uma vasta quantidade de infraestruturas, no ramo do apoio social, de educação, da cultura, do desporto e da religião, tendo como exemplos a Santa Casa da Misericórdia, três jardins-de-infância, três escolas do 1.º ciclo, este Colégio que estamos a caracterizar, o ISCIA (Instituto Superior de Ciências de Informação e Administração), o agrupamento de escuteiros, o centro de cultura e desporto de Santa Joana, o Parque de Feiras e Exposições de Aveiro, o Parque Desportivo de S. Brás, o Estádio Municipal de Aveiro, a Igreja de Santa Joana, entre outros. Em termos de localização geográfica, esta freguesia situa-se no centro do Concelho de Aveiro e tem como freguesias confinantes: Esgueira, Eixo, Oliveirinha, São Bernardo, Glória e Vera Cruz. Santa Joana tem uma área total de aproximadamente 5,83 km2.

Caracterização do Colégio D. José I

O Colégio D. José I, criado no ano de 1997, é um estabelecimento que abrange os ensinos pré-escolar, básico e secundário, sedeado na freguesia de Santa Joana, em Aveiro. É de salientar que este Colégio é particular nas respostas sociais do pré-escolar e do 1.º Ciclo. Os outros ciclos de ensino são financiados pelo Estado. O nome D. José I deve-se ao rei que elevou Aveiro de vila a cidade. A sua oferta formativa estende-se desde os ensinos anteriormente referidos e ainda proporciona Cursos de Educação e Formação de Jovens (equivalência ao 9.º ano de escolaridade), Cursos Profissionais e Cursos de Educação e Formação de Adultos (equivalência ao 12.º ano).

O Colégio funciona todos os dias úteis, iniciando as suas atividades às 9 horas e encerrando às 18 horas. Os serviços específicos do Colégio tais como: Bar, Cantina, Papelaria/Reprografia, Serviços Administrativos, Biblioteca/Mediateca têm um horário estabelecido e devidamente divulgado.

Dado que a grande parte do tempo em que se esteve no colégio foi passado na biblioteca, deu-se ênfase a este espaço, pois tornou-se bastante familiar para o grupo. Apesar desta ter poucas mesas, contém muitos livros e materiais com que se pode trabalhar para preparar as aulas, bem como para os alunos fazerem os seus trabalhos e passarem os seus momentos de lazer.

O Colégio D. José I é composto por dois edifícios, com três pisos cada, um polivalente e uma oficina de mecânica. Em torno do Colégio existem zonas verdes, um parque infantil e o campo de jogos, permitindo aos alunos que usufruam desse espaço calmo e agradável. Quando se entra na entrada principal deste contexto, depara-se com uma grande sala polivalente, onde os alunos jogam pingue-pongue, brincam e conversam, existindo também um palco. Este polivalente é comum aos dois edifícios, o principal e o secundário. Do lado do edifício principal (ala esquerda) pode-se encontrar no rés-do-chão, o gabinete da Direção Pedagógica, os Serviços Administrativos, a Papelaria/Reprografia, a sala dos professores e formadores, o gabinete de Serviços de Psicologia e Orientação, a Sala de ATL do 1.º CEB, instalações sanitárias e salas de aula do pré-escolar e 1.º CEB. No 2.º piso, a Biblioteca/Mediateca, uma Sala de Informática e salas de aula. O 3.º piso é apenas composto por salas de aula. Cada sala de aula destina-se a uma turma, no geral. No edifício secundário (ala direita), no rés-do-chão, pode-se usufruir do Bar e do Refeitório. Existe também um vestuário para o pessoal não docente, as salas de Educação Visual e Tecnológica, instalações sanitárias, os balneários e uma sala de material de Educação Física. No 1.º piso, existe a sala de Educação Musical, o laboratório e salas de aula. Por último, no 3.º piso encontra-se salas de aula. De modo geral, as salas do 2.º Ciclo (as quais incidiu a nossa observação) estão organizadas em filas e permite que os professores circulem livremente pela sala e que visualizem os seus alunos. Estas salas, na sua maioria, estão equipadas com quadro interativo, computador, quadro de ardósia (sendo este usado quando falha a eletricidade), quadros de cortiça, um móvel param arrumos, entre outros recursos.

Especificando as suas respostas educativas, este contexto responde às necessidades dos alunos do pré-escolar até o Ensino Básico, assim como também, alunos dos cursos de educação e formação (Mecânica de veículos ligeiros) e dos cursos profissionais (Técnico auxiliar de saúde, Animador sociocultural e Técnico de manutenção industrial). Para além das atividades obrigatórias, o Colégio possui um vasto leque de ofertas de Atividades de Enriquecimento Curricular (AEC) e atividades extracurriculares, que são sujeitas a um pagamento mensal.

As várias atividades podem ser observadas a partir da seguinte tabela:

Nível de ensino	AEC's	Atividades extracurriculares
Pré-escolar	✓ Oficina de Inglês; ✓ Oficina de Música; ✓ Sessão de Psicomotricidade; ✓ Oficinas: Desenvolvimento Artistico, Culinária, Ciências; preparação para o 1.º ciclo (para crianças de 5 anos de idade)	✓ Atividades Rítmicas e expressivas; ✓ Expressão dramática; ✓ Kempo Karate; ✓ Língua Gestual.
1.º Ciclo	✓ Atividades de Apoio ao estudo; ✓ Atividade Fiica e desportiva; ✓ Ensino de Inglês; ✓ Ensino de Música; ✓ Expressão Plástica; ✓ Sessão de Afetos.	✓ Atividades de Tempos Livres; ✓ Atividades Rítmicas e Expressivas; ✓ Expressão dramática; ✓ Judo; ✓ Kempo Karate; ✓ Língua Gestual; ✓ Pequenos Cientistas.
2.º e 3.º Ciclos	✓ Clubes: o Clube Verde; o Clube da Guitarra; o Clube de Multimédia; o Clube de Jornalismo e Fotografia; o Clube da Matemática; o Clube de Música; o Clube da robótica; o Desporto Escolar (Basquetebol, Futsal e Ténis de Mesa); o Oficina das Arte&Manhas; o Oficina dos talentos. ✓ Aulas de recuperação.	✓ Atividades de Tempos Livres.

Tabela 2 - Atividades do Colégio D. José I

No que concerne aos horários letivos, no pré-escolar e 1.º ciclo, as atividades letivas desenrolam-se das 9 às 15 horas. No 2.º e 3.ºciclos estas decorrem desde as 9h até as 16:20 ou 17:15h, dependendo dos horários, exceto à quarta-feira, que acabam às 13:25h. Os cursos de formação e profissionais podem acabar às 16:20 ou às 18h. Tal como consta nos documentos oficiais deste colégio, o 2.º ciclo é composto por 6 turmas, nomeadamente 3 no 5.º ano (A, B, C) e 3 no 6.º ano (A, B, C).

Em relação à carga horária letiva, o colégio prevê um determinado número de horas para cada disciplina, nos diferentes níveis de ensino. Mais especificamente no 2.º ciclo, os blocos são de 90 minutos e de 45 minutos, que correspondem aos números 1 e 0.5, respetivamente, como se pode observar na seguinte tabela:

Disciplinas / Áreas Curriculares não Disciplinares	5.º ano	6.º ano
Língua Portuguesa	3	3
Matemática	3	3
História e Geografia de Portugal	1.5	1.5
Ciências da Natureza	1.5	1.5
Inglês	1.5	1.5
Educação Visual e Tecnológica	2	2
Educação Musical	1	1
Educação Física	1.5	1.5
Educação Moral e Religiosa Católica	0.5	0.5
Estudo Acompanhado	0.5	1
Formação Cívica	1	0.5

Tabela 3 - Carga horária letiva

Em termos de avaliação, as classificações atribuídas nos testes que dão a conhecer uma parte dos resultados dos alunos estão classificadas da seguinte forma:

Fichas de avaliação		Áreas curriculares não disciplinares
Classificação	**%**	
Muito insuficiente	0-19	Não satisfaz (NS)
Insuficiente	20-49	
Suficiente	50-69	Satisfaz (S)
Bom	70-89	Satisfaz Bem (SB)
Muito Bom	90-100	

Tabela 4 - Classificações atribuídas nos testes

Segundo o Plano Anual de Atividades e Formação (PAAF), quanto aos recursos e materiais que este Colégio disponibiliza para o bom desempenho das suas funções educativas, este tem a biblioteca e mediateca, a sala de estudo, de ginástica/judo, de música, os laboratórios de informática, de matemática, de física e química, a oficina TIC, o polivalente, entre outros. Em termos de equipamentos, este contém computadores e videoprojectores, quadros interativos, computadores portáteis, retroprojetores, leitores de CD/DVD, televisores, fotocopiadoras, *scanner*, impressoras, máquinas fotográficas digitais, sistema *wireless*, *softwares* diversos, autocarros, entre outros.

Por último, é imprescindível referir que este colégio preocupa-se com a motivação dos seus alunos, concedendo-lhes assim, um mérito escolar. O colégio tem várias classificações para os vários méritos, pois

> "[…] os alunos têm direito a ser valorizados pelas suas capacidades ou atitudes, bem como pelos seus resultados escolares; (…) o Quadro de Honra reconhece os alunos que revelam excelentes resultados escolares ou que realizam atividades de excelente qualidade, quer no domínio curricular, quer no domínio das Atividades Extracurriculares. Esta é uma forma do Colégio premiar os seus alunos não só ao nível dos seus resultados escolares, mas também das suas atitudes e valores […]" (Regulamento Interno do Colégio do José I, p. 103).

3.4. Caraterização dos participantes

Como se pretende analisar o modo como tarefas de natureza exploratória contribui para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. A escolha da turma do 5.º B foi pelo fato de ser a turma que foi acompanhada nas aulas de Matemática e é constituída por 29 alunos, embora na inscrição da disciplina se encontrem inscritos 30 alunos. Os alunos encontram-se quase todos na mesma faixa etária, com exceção de três alunos que são repetentes.

Género	Masculino	Feminino
N.º de alunos	16	13

Tabela 5 - Distribuição por género os alunos da turma

Podemos dizer que esta turma trabalha bem, são pouco participativos, destacando-se apenas os melhores alunos.

O aproveitamento da turma, no primeiro e segundo período, à disciplina de matemática, no geral foi positivo, como demonstra o gráfico seguinte

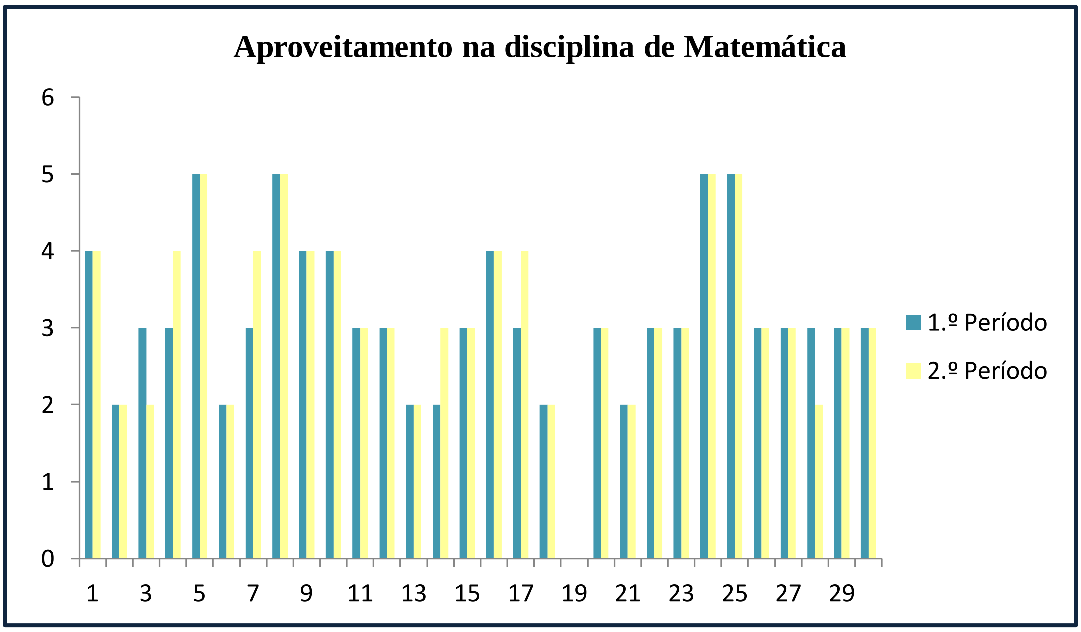


Gráfico 1 - Aproveitamento no 1.º e 2.º período na disciplina de matemática

Os alunos assumem um papel importante na investigação, e por razões de anonimato serão designados por A1, A2, A3, …, A30. A aluna denominada por A19 desistiu, embora continue inscrita na disciplina.

As tarefas não foram aplicadas na íntegra nas aulas de matemática, devido ao facto de sermos um grupo de três estagiárias e termos tarefas para aplicar nas aulas de matemática. Por esse motivo, as tarefas não foram muito extensas. Esse motivo, também motivou a escolha de uma tarefa que fizesse a interdisciplinaridade com outras disciplinas, nomeadamente Educação Tecnológica e Educação Visual. No final, realizou-se uma oficina de escrita, fazendo, desta forma, a interdisciplinaridade com as unidades curriculares de Português e Ciências Naturais.

3.5. Fases da investigação

Esta investigação decorreu entre Setembro de 2012 e Julho de 2013 ao mesmo tempo da prática pedagógica no 2.º semestre e desenvolveu-se em cinco fases:

1.ª Fase	Escolha do tema da presente investigação, seguindo-se a problemática educativa, objetivos e questões de estudo às quais se pretende dar resposta.
2.ª Fase	Recolha e registo da informação encontrada na literatura em torno da temática em questão que se enquadra nas tarefas planeadas e na análise e discussão dos dados.
3.ª Fase	Caraterização do contexto educativo e dos participantes e seleção das atividades didáticas escolhidas para este tema, com base na informação recolhida sobre o contexto e a turma que vai ser o objeto de estudo.
4.ª Fase	Definição das técnicas e instrumentos de análise de dados e implementação das atividades selecionadas. Recolha de dados
5.ª Fase	Análise de dados e conclusões finais.

Tabela 6 - Fases da investigação

Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição destas cinco fases pelos meses em que decorreu esta investigação.

Fases	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul
1.ª										
2.ª										
3.ª										
4.ª										
5.ª										

Tabela 7 - Distribuição das fases de investigação

A primeira fase que decorreu entre os meses de outubro e novembro, é uma fase introdutória onde se começa a ponderar sobre o tema com o qual se deseja trabalhar, objetivos e questões às quais se pretende dar resposta. Na segunda fase que decorreu durante a realização deste trabalho, foi feita uma revisão da literatura sobre os temas de natureza teórica e da metodologia de investigação a adotar. Na terceira fase que decorreu entre fevereiro e março foi feita a seleção e planificação da experiência de ensino e a elaboração de todo o material necessário tendo em conta as orientações curriculares do programa da disciplina e a pesquisa realizada em brochuras relacionadas com o tema em estudo.

Além disso também, nesta fase foi dado a conhecer à direção pedagógica as intenções e objetivos desta investigação e foi solicitada uma autorização para a sua concretização (Apêndice 8). Posteriormente, na 4.ª fase desta investigação, procedeu-se à implementação das tarefas planificadas na fase anterior. A recolha e análise de dados, assim como as conclusões e considerações finais decorreram durante os meses de maio, junho e julho, foi realizada uma análise geral das produções dos alunos nas tarefas. Uma pequena parte desta análise ainda foi feita em maio no decorrer da recolha de dados e implementação das tarefas. (Bogdan e BiKlen, 1994), salienta que “alguma análise tem de ser realizada durante a recolha de dados. Sem isto, a recolha de dados não tem orientação; se assim não o fizer, os dados que recolher podem não ser suficientemente completos para realizar posteriormente a análise.” (p. 206). Esta análise teve em conta os objetos matemáticos que intervêm na solução do problema e suas relações primárias.

Capítulo 4

Desenho das tarefas

Esta investigação focou-se na concretização de uma EE, realizada no 2.º CEB, com o título "Raciocínio proporcional", visando analisar o raciocínio dos alunos mediante situações que envolvam proporcionalidade direta, e dar resposta às seguintes questões de investigação: i) Que procedimentos utilizam os alunos do 2.º CEB na resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional? ii) Em que fase do raciocínio proporcional os alunos se encontram antes do ensino formal da proporcionalidade direta? iii) Que dificuldades apresentam os alunos quando confrontados com situações que envolvem o raciocínio proporcional?

Neste capítulo apresenta-se ainda uma planificação das tarefas implementadas, assim como uma descrição das mesmas.

4.1. Planificação das tarefas

Esta experiência de ensino centra-se no subtema proporcionalidade direta e consiste na realização de tarefas de natureza exploratória, pois pretende-se que os alunos mobilizem os seus conhecimentos intuitivos. As tarefas propostas foram realizadas com alunos do 5.º ano, contudo o subtema proporcionalidade direta é lecionado formalmente no 6.º ano, todavia, conforme o programa de matemática, a resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional faz parte dos objetivos específicos do programa do 3.º e 4.º ano. Assim, neste trabalho pretendo dar ênfase às estratégias que os alunos utilizam antes do ensino formal da proporcionalidade direta, e contribuir, de certa forma, para o desenvolvimento de capacidades cognitivas em relação a este tema.

Deste modo, realizaram-se duas tarefas, sendo a primeira constituída por 4 partes, todas elas relacionadas com o "Ovo Mágico". Este é um tangram constituído por 9 peças e é considerado um recurso pedagógico que pode desenvolver vários conceitos matemáticos dependendo da criatividade de cada professor, neste caso, este tangram será utilizado para desenvolver o raciocínio proporcional e tentar perceber as estratégias que os alunos utilizam, mediante problemas que o envolvem. Além disso, desenvolve a coordenação motora e a destreza na utilização de materiais geométricos e também possibilita a participação do aluno em trabalho de grupo, respeitando a criatividade dos colegas.

As duas primeiras partes da tarefa consistiram na construção geométrica do ovo e na ampliação do mesmo, as outras duas partes consistiram no estabelecimento de relações entre partes da figura (um pato) que os alunos obtiveram com as peças ampliadas do ovo e o reconhecimento de situações não proporcionais. A tarefa 2 consistiu na elaboração de vários tipos de textos sobre o ou os patos. O objetivo da elaboração desta tarefa foi promover a articulação curricular. Deste modo, esta experiência de ensino foi planificada de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico e com as metas curriculares das unidades curriculares Ciências Naturais, Português, Educação Tecnológica (ET) e Educação Visual (EV). Além disso, também foi preparada de acordo com a revisão bibliográfica que consta do enquadramento teórico.

A primeira e a segunda parte da tarefa que consistiram na construção do ovo e na ampliação deste, foram realizadas numa aula de ET, o principal motivo foi a falta de tempo e disponibilidade por parte dos professores para a implementação deste projeto outro motivo foi o facto de o grupo de estágio ser de 3 elementos, o que ocupava muito tempo das aulas de matemática. Dado que não se pretendia interferir com o normal funcionamento das atividades letivas decidiu-se que as duas primeiras partes da tarefa iam ser implementadas nas aulas de ET, o que foi bastante pertinente, porque os objetivos desta unidade curricular encontram-se de acordo com o que se pretende com esta tarefa. Além disso o uso de materiais manipuláveis como as peças do tangram, a sua construção e a utilização de materiais geométricos também contribuíram para que a tarefa fosse concretizada nesta unidade curricular. De acordo com NCTM (2007), devem ser "utilizadas tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos e para desenvolver e desafiar intelectualmente os alunos. A seleção correta das tarefas poderá despertar a curiosidade e envolve-los na matemática." (p. 19). Nesta experiência de ensino são abordados diversos conceitos matemáticos, relacionados com a geometria, álgebra e números e operações. A intenção é relacionar o raciocínio proporcional, que está inserido no tema álgebra, com outros temas da matemática. Também procurou-se uma tarefa de carater lúdico, para motivar os alunos e permitir o uso de materiais manipuláveis, de estratégias intuitivas, que permitam mais tarde a apresentação de outras estratégias mais formais e estruturadas. A aprendizagem através do jogo, neste caso o tangram, permite que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e divertido, pois estes estão absorvidos por diversas noções matemáticas, além de estar ligado com o dia-a-dia dos alunos, ou seja a matemática não é vista como um processo isolado do quotidiano dos alunos. Por outro lado, os jogos enriquecem o raciocínio, permitindo o desenvolvimento e aperfeiçoamento de técnicas intelectuais. Assim, são um bom ponto de partida para ensinar matemática e podem servir de base para uma posterior formalização do pensamento matemático. O jogo é facilitador da aprendizagem devido ao seu caráter motivador, é um dos recursos didáticos que podem levar os alunos a gostar mais da matemática.

Em seguida, apresenta-se a planificação das tarefas:

Tarefa	Duração da tarefa	Objetivos	Conteúdos programáticos	Modo de trabalho
Tarefa 1 – parte I ✓ Construir o ovo mágico conforme instruções.	1.ª 90 minutos	✓ Construir um tangram; ✓ Identificar nas peças do tangram figuras da geometria plana; ✓ Relembrar conceitos geométricos já lecionados; ✓ Conhecer novos conceitos, nomeadamente a mediatriz de um segmento de reta.	✓ Circunferência e círculo; ✓ Ângulos; ✓ Triângulos; ✓ Classificação de triângulos; ✓ Mediatriz de um segmento de reta	Individual
Tarefa 1 – parte II ✓ Fazer uma ampliação do ovo mágico. Recortar, pintar e montar uma figura (um pato)	2.ª 120 minutos	✓ Ampliar uma figura.	✓ Ampliação; ✓ Razão	Grupo
Tarefa 1 – parte III Estabelecer relações de primeira ordem e segunda ordem.	3.ª 90 minutos	✓ Estabelecer relações proporcionais. ✓ Reconhecer a equivalência entre duas frações. ✓ Desenvolver capacidades cognitivas sobre proporcionalidade direta.	✓ Fração; ✓ Quociente; ✓ Razão; ✓ Equivalência de frações; ✓ Proporção.	Individual
Tarefa 1 – parte IV	4.ª 90 minutos	✓ Identificar situações onde existe proporcionalidade direta e situações onde não existe.	✓ Perímetro; ✓ Área; ✓ Proporção	Individual
Tarefa II – oficina de escrita	5.ª 90 minutos	✓ Transversalidade com a língua portuguesa, na realização de diversos tipos de textos ✓ Transversalidade com as ciências na realização de textos informativos.	✓ Textos: narrativo, dramático, banda desenhada, poético e informativo. ✓ Conceitos científicos relacionados com os patos	Individual

Tabela 8 - Planificação das tarefas

4.2. Descrição das tarefas

Em seguida descrevem-se as tarefas e a forma como decorreram, para isso faz-se uma abordagem geral da tarefa 1, em seguida descrevem-se as 4 partes da tarefa e por fim descreve-se a tarefa 2. As tarefas irão ser descritas de acordo com a configuração epistémica de Godino e Font (2007) já referido no enquadramento teórico, esta tem como objetos primários as situações problema; a linguagem; as regras onde constam os procedimentos, definições e proposições; e os argumentos. No apêndice 5 apresenta-se uma síntese da configuração epistémica dos objetos e relações primárias da tarefa 1.

Tarefa 1 – O "Ovo Mágico"

A primeira tarefa é constituída por 4 partes, todas elas relacionadas com o "Ovo Mágico". Os objetivos gerais consistiam na construção e ampliação do ovo, construção de uma figura com as peças do ovo, estabelecer relações proporcionais de invariância e de covariação e reconhecer a equivalência entre duas frações, e reconhecer situações onde não existe proporcionalidade direta. Pois, segundo Cabrita (1998), o raciocínio proporcional envolve, o estudo da invariância, equivalência e da não equivalência, segundo uma variedade de transformações diferentes, o sentido de covariância e de comparações múltiplas. Também Spinillo (2002), referida na revisão da literatura, reforça que a competência matemática ligada ao raciocínio proporcional implica o reconhecimento da equivalência entre situações distintas e o estabelecimento de relações entre relações, ou seja, estabelecer relações de segunda ordem que ligam duas ou mais relações de primeira ordem. (Costa, 2007), citando Lamon (1993), como consta na revisão da literatura, refere que "é necessária uma compreensão ao nível de covariância – as quantidades que compõem uma razão variam de forma conjunta – e ao nível da invariância – as relações entre as quantidades permanecem constantes. Deste 8modo, é essencial perceber que na equivalência entre razões algo muda (as quantidades absolutas) mas ao mesmo tempo algo se mantém constante (a proporção)." (p. 9).

No final de cada etapa desta tarefa, foi realizado um momento de discussão com o objetivo de encorajar e motivar a participação dos alunos na resolução da tarefa, facilitando, desta forma, o pensamento do aluno e o desenvolvimento de capacidades cognitivas sobre o raciocínio proporcional.

I Parte – Construção do ovo

A primeira parte da tarefa (apêndice 1) foi realizada individualmente, numa aula de ET e tinha como objetivos construir o ovo, utilizando para isso materiais geométricos, como régua, esquadro e compasso; identificar no ovo as figuras da geometria plana, nomeadamente, a circunferência (foi esclarecida a diferença entre circunferência e círculo), pois muitos alunos não sabiam a diferença e utilizavam as duas expressões, e o triângulo retângulo isósceles; outro objetivo era recordar conceitos já lecionados, como segmentos de reta, diâmetro, raio e figuras planas, e conhecer novos conceitos, como a mediatriz. Outro objetivo desta tarefa, desta parte da tarefa é transversalidade com a unidade curricular de EV e ET.

No que concerne à linguagem utilizada, esta tarefa permitiu aos alunos a apropriação de alguns termos, a maior parte já lecionados, como a mediatriz de um segmento de reta, circunferência, círculo, perpendicular, triângulos, outro tipo de linguagem utilizada foi a gráfica nomeadamente a construção do ovo. Quanto às regras, esta tarefa continha um texto instrucional que os alunos tinham que ler com atenção e respeitar os passos da construção do ovo, ao mesmo tempo iam se apropriando de conceitos, o manuseamento do material geométrico também era muito importante para a construção correta do ovo. No que respeita à argumentação, no decorrer da aula, depois de se ter dado algum tempo
para que os alunos conseguissem resolver a questão a investigadora foi realizando os passos no quadro para dar oportunidade aos alunos que não estavam a conseguir de conseguirem construir o ovo. Por exemplo, quando surgiu o momento de traçarem a mediatriz houve alunos que não utilizaram o compasso, nem a régua, mas sim o esquadro, justificando que era mais fácil e mostraram como o fizeram. Houve alguns alunos que tiveram muitas dificuldades na construção do ovo, pois, a maior parte dos compassos não estavam nas melhores condições e alguns alunos também mostraram algumas dificuldades no manuseamento do compasso.

Momentos da I parte da tarefa

1º Momento: <u>Distribuição de uma ficha de trabalho</u> (apêndice I), onde continha um texto instrucional com os passos da construção do ovo aos quais os alunos deviam obedecer. Além disso, foi facultada uma folha em branco para que os alunos desenhassem o ovo. Esta folha serviu para posteriormente analisar as respostas dadas pelos alunos.

2.º Momento: Questionamento sobre o tipo de texto da ficha de trabalho e quais as suas características. Estas questões eram pertinentes, visto os aluno estarem a aprender os vários tipos de texto na unidade curricular de Português. Além disso era uma oportunidade para se fazer articulação curricular.

3.º Momento: Explicação aos alunos sobre o que era o "Ovo mágico" e demonstração de alguns exemplos de tangrans.

4.º Momento: Leitura, pela investigadora, dos passos da construção do" Ovo mágico" , foi explicado o conceito de mediatriz.

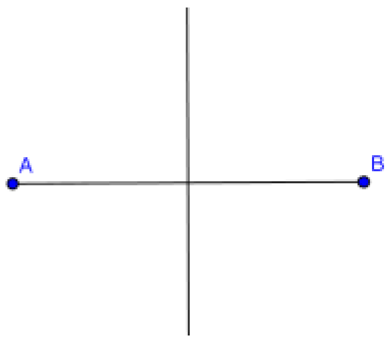
5.*º Momento:* Construção do ovo, foi dado algum tempo para que os alunos realizarem a tarefa autonomamente (cerca de 15 minutos), durante este tempo a investigadora foi circulando pela sala, observando como é que os alunos estavam a realizar a tarefa e que tipos de dificuldades estavam a sentir.

6.º Momento: Construção do ovo no quadro interativo, como alguns alunos estavam com dificuldades a investigadora decidiu começar a desenhar os passos no quadro interativo. No intervalo de cada passo deu-se um tempo para que todos acompanhassem o desenho.

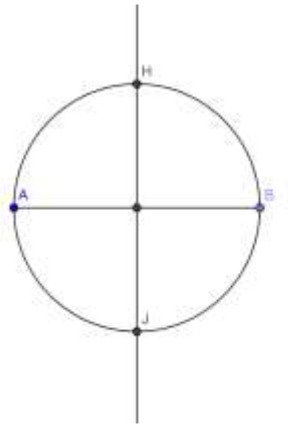
Resolução esperada

Em seguida dá-se um exemplo de uma resolução que se esperava que os alunos fizessem:

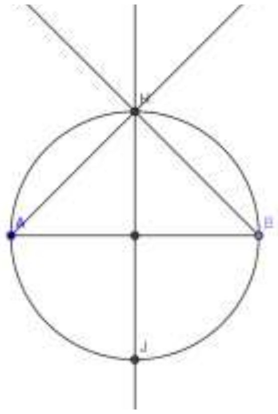
1. Desenha um segmento de reta $\overline{AB}$ com 4 cm de comprimento e traça uma reta perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$ e à mesma distância dos pontos A e B.



2. Com o compasso e centro a meio do segmento de reta traça uma circunferência com um raio de 2 cm e marca o ponto H e J.

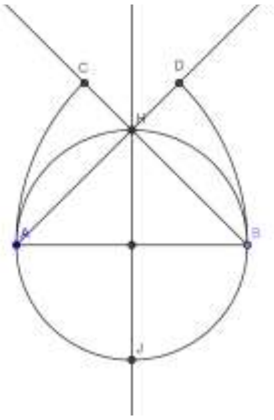


3. Desenha os segmentos de reta AH e BH e prolonga-os.

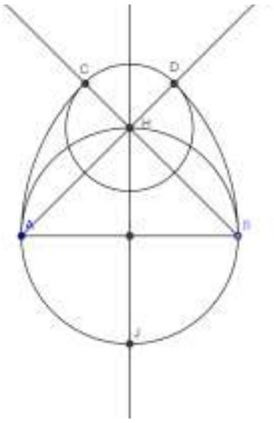


Nota: Neste momento da construção pode-se observar um triângulo retângulo isósceles inscrito numa circunferência, tal como a figura utilizada por Hipócrates na quadratura da luna, referida no tópico da história da matemática.

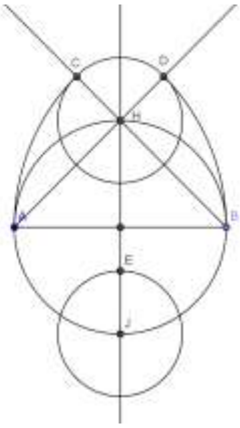
4. Desenha os arcos BD e AC (com centro em A traça o arco BD, com centro em B desenha o arco AC).



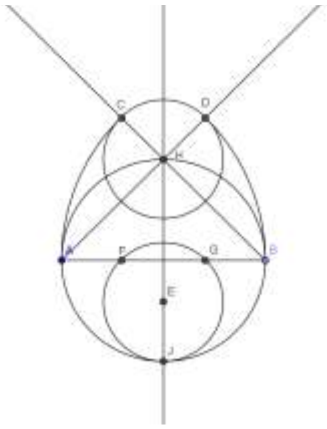
5. Desenha uma circunferência centrada em H que toca, os grandes círculos em C e D. Mantém o compasso aberto na mesma medida, para o passo seguinte.



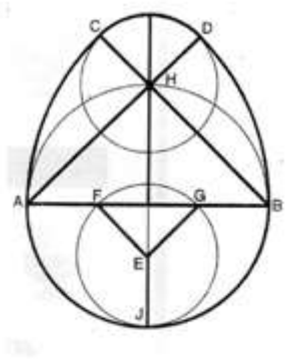
6. Com o compasso com a mesma abertura do passo 5, com centro em J marca E. Sem fechares o compasso passa para o passo seguinte.



7. Com a mesma abertura do passo 6 desenha uma circunferência centrada em E e marca os pontos F e G e une-os.



Depois de seguirem todos os passos, os alunos deveriam obter o seguinte resultado:



II parte da tarefa – ampliação do ovo e construção da figura

A segunda parte da tarefa (apêndice 2) foi implementada em duas sessões de 90 minutos com a turma dividida em 7 grupos e tinha como objetivos a ampliação do ovo e a visualização de figuras. A primeira questão pedia aos alunos que comparassem o diâmetro da circunferência grande do ovo com a largura da cartolina que lhes foi facultada. Apraz referir que foi facultada a cada grupo uma cartolina com diferentes medidas de largura (8cm, 12cm, 16cm, 20cm, 24cm, 28cm e 32cm) e com comprimento adequado para a ampliação de cada ovo. A segunda questão consistia na ampliação do ovo, com base no resultado da questão anterior. A terceira questão fazia a transversalidade com as unidades curriculares de EV e ET, nomeadamente nas atividades de pintura e recorte, esta questão era de carater lúdico, os alunos tinham que recortar as peças do ovo ampliado e pintá-las, utilizando para esse efeito, somente as cores primárias: azul, amarelo e vermelho; com estas cores tinham que formar outras cores (cores secundárias). A quarta questão consistia em construir uma figura com as peças do ovo, foi-lhes facultado uma figura pintada de preto e os alunos tinham que a construir, nesta questão os alunos também estavam a desenvolver a visualização. Segundo Breda, Serrazina, Meneses, Sousa e Oliveira (2011) os alunos devem desenvolver desde o início da escolaridade capacidades de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objetos geométricos, estes autores ainda referem que “tarefas geométricas deste tipo estimulam os alunos a pensar e a expressar-se sobre as suas perceções, o que por sua vez ajuda ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio.” (p.10). No final desta parte da tarefa foi feita uma demonstração e discussão dos resultados.

No que concerne à linguagem utilizada, esta tarefa permitiu aos alunos utilizarem termos matemáticos, como raio, diâmetro e ampliação, os dois primeiros já tinham sido lecionados e o último termo, ainda não tinham conhecimento, também o facto de ser um trabalho de grupo permitiu a partilha de ideias entre os elementos do grupo. Outro tipo de linguagem utilizada foi a gráfica, alguns grupos utilizaram o desenho na primeira questão. Quanto às regras, os alunos na primeira questão tinham que medir o diâmetro da circunferência e a largura da cartolina e dividir as duas medidas, na segunda questão tinham que ampliar o ovo aplicando o raciocínio proporcional, ou seja, se o quociente era 2, então o diâmetro do ovo era ampliado 2 vezes e o raio também era ampliado 2 vezes. Com estas questões os alunos apropriaram-se dos conceitos de raio, diâmetro, quociente e implicitamente de razão de semelhança. No que respeita à argumentação, no enunciado da primeira questão era pedido para os alunos justificarem a resposta não bastava colocar o resultado, tiveram que explicar como chegaram ao resultado, no final da sessão os alunos tiveram que explicar aos colegas como ampliaram o ovo.

Momentos da 1.ª sessão de 90 minutos

1.º Momento: Divisão da turma em grupos de quatro elementos cada grupo, como o número de aluno era impar (29), houve um grupo que ficou com cinco elementos, em seguida cada grupo elegeu um porta-voz.

2.º Momento: Distribuição de uma ficha de trabalho e uma cartolina cortada com as medidas pretendidas, por cada grupo.

3.º Momento: Ampliação do ovo, os alunos começam a responder à primeira alínea da questão 1 autonomamente, durante cerca de 5 minutos, durante este tempo a investigadora só observa a realização da atividade dos alunos. Passado esse tempo os alunos começam a solicitar a ajuda da investigadora e para orientar os alunos coloca-lhes a seguinte questão: *quantas vezes cabem o diâmetro da circunferência grande na largura da cartolina? O que tens que fazer?* Neste momento houve um grupo que mediu com o polegar e o dedo indicador o diâmetro e depois transportou essa medida para a cartolina. Posteriormente a investigadora disse-lhes que estava correto o seu modo de pensar, mas alertou-os que o valor obtido era uma estimativa, não o valor correto, havia uma forma de obter um valor mais preciso. Então o aluno pegou na régua e mediu corretamente. À medida que os alunos acabavam a primeira questão começavam a realizar a segunda, que consistia na ampliação do ovo, esta tarefa era mais difícil, os grupos não sabiam como ampliar o ovo, mas depois de alguma orientação por parte da investigadora houve alguns que conseguiram. Para isso a investigadora fez as seguintes questões *repara na medida do segmento de reta que vai do ponto J ao centro da circunferência? Que medida é essa?* Para alguns bastou estas questões, mas para outros foi necessário ir mais longe, por exemplo, *se o diâmetro cabe 2 vezes na largura da cartolina* (se a cartolina medisse 8cm de largura), *então quantas vezes temos que aumentar o raio?*

4.º Momento: Demonstração e discussão dos resultados, no final desta sessão, o porta-voz de cada grupo foi mostrar o seu trabalho à turma e explicou como conseguiu ampliar o ovo. Todos os grupos no final conseguiram perceber que se o diâmetro da circunferência grande cabia 2 vezes na largura da cartolina, por exemplo, então o raio também aumentava duas vezes. Para saberem a medida do novo raio a maior parte dos grupos não teve dificuldades em utilizar a multiplicação.

Resolução esperada

Questão 1 - Medir o diâmetro da circunferência grande do ovo e medir a largura da cartolina e verificar quantas vezes essa medida cabia na largura da cartolina, fazendo uma divisão.

Questão 2 - Para começar a ampliar o ovo, os alunos deverão ter como ponto de referência o segmento que começa no ponto J e acaba no centro da circunferência grande, que é a medida do raio (2 cm). Se na largura da cartolina cabe 2 vezes a medida do diâmetro então a medida do raio também vai aumentar duas vezes. Assim, o segmento de reta que começa em J e acaba no centro da circunferência tem que ser ampliado 2 vezes (se considerarmos a cartolina que tem de largura 8 cm).

Momentos da 2.ª sessão de 90 minutos

1.º Momento: Recorte e pintura das peças do ovo, utilizando só as cores primárias (azul, vermelho e amarelo). Em seguida distribuiu-se pelos grupos todos os materiais necessários (tintas e pinceis)

2.º Momento: Construção de uma figura com as peças do ovo, foi dado algum tempo, cerca de 10 minutos para que os alunos conseguissem fazer autonomamente, contudo nenhum grupo conseguiu, alguns disseram que era um *quebra-cabeças.* Passado algum tempo, a investigadora facultou aos grupos a solução.

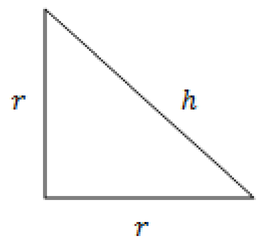
3.º Momento: Demonstração e discussão dos resultados, no final da sessão as figuras foram expostas no quadro, para que os alunos visualizassem o seu crescimento, ou seja, quantas vezes cada figura foi ampliada, para isso a investigadora sugeriu que se fizesse uma tabela. Apraz referir que no quadro a primeira figura que aparece é a figura A, que foi a investigadora que fez (corresponde ao ovo que cada um dos alunos desenhou). Essa tabela tinha duas linhas horizontais, a primeira linha continha as letras das figuras (de A a H), a segunda linha tinha o valor da medida da largura de cada cartolina, que deu origem à respetiva figura, depois através de ligações colocaram o número de vezes que as figuras foram ampliadas.

III parte da tarefa 1

Esta tarefa (apêndice 3) foi realizada numa aula de matemática, pois era pertinente utilizar as figuras nesta unidade curricular, para isso esperou-se que o professor lecionasse o tópico equivalência de frações. Propôs-se ao professor a utilização das figuras na segunda aula deste tópico. Todavia, para esse dia estava previsto fazer uma revisão do tópico lecionado na aula anterior e a introdução do tópico “frações próprias e impróprias”. Então sugeriu-se ao professor uma planificação que se fizesse a revisão do tópico “ equivalência de frações” com as figuras e depois fizesse ligação com a outra matéria. Para fazer a revisão da matéria propôs-se uma ficha de trabalho, com o objetivo de reconhecerem a equivalência de dois quocientes através do estabelecimento de relações proporcionais, ou seja, de covariação das variáveis e invariância entre as variáveis. Essas variáveis eram duas partes da figura o comprimento do pescoço (CP) e a altura das patas (AP).

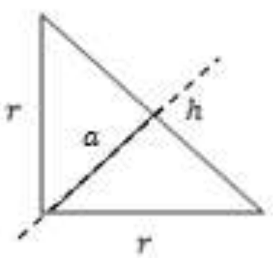
No que concerne à linguagem utilizada, esta tarefa permitiu aos alunos utilizarem uma linguagem verbal, quando alguns alunos discutiam com a turma as suas conclusões, linguagem simbólica, na representação das frações e no reconhecimento da equivalência das frações e linguagem escrita nos registos das conclusões. Quanto às regras, esta tarefa foi realizada com recurso às figuras construídas pelos alunos. É de referir que os alunos apropriaram-se dos conceitos de quociente, fração e equivalência de frações, implicitamente também foram abordados os conceitos de razão e proporção. No que respeita à argumentação, o enunciado da questão 1.3. solicitava a argumentação dos alunos, assim como a discussão sobre a atividade desenvolvida.

A planificação desta tarefa não foi fácil, numa primeira fase de planificação estava destinado estabelecer relação entre a medida do raio e do diâmetro (o raio era metade do diâmetro), contudo pensou-se que a tarefa ficava mais estimulante se utilizasse as figuras que os alunos construíram. Dessa forma, precisava de duas medidas das peças que compõem o pato que tivessem como medida um número inteiro. Todavia, verificou-se que de todas as medidas das peças só havia uma com número inteiro, que era a medida do raio. Então colocou-se a hipótese de utilizar algo como unidade de medida, um fio ou um palito, mas também era preciso encontrar uma medida para esse bocado de fio ou palito. Tendo como ponto de partida o raio, que era a medida dos dois catetos de cada um dos triângulos retângulos e uma vez que esta figura correspondia ao processo utilizado por Hipócrates aquando a quadratura da luna, utilizou-se, tal como este matemático, o teorema de Pitágoras, para obter o seguinte resultado:

	$r^2 + r^2 = h^2$ $2r^2 = h^2$ $h = \sqrt{2}\,r$

Se um bocado de fio ou palito, neste caso optou-se por um palito, representasse $\sqrt{2}$, podíamos medir, por exemplo o comprimento do pescoço (CP), que é o h e que era igual a $r\ palitos,$ sendo r um número inteiro. Contudo, ainda faltava encontrar a medida de outra peça da figura, cujo comprimento fosse múltiplo de $\sqrt{2}$, vejamos:

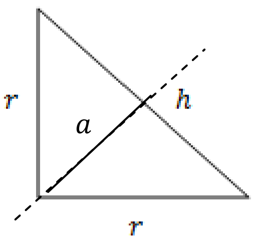
<table>
<tr>
<td>



</td>
<td rowspan="2">

$$a^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$
$$a^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$
$$a = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$$
$$a = \sqrt{r^2 - \frac{2r^2}{4}}$$
$$a = \sqrt{\frac{4r^2 - 2r^2}{4}}$$
$$a = \sqrt{\frac{2r^2}{4}}$$
$$a = \frac{\sqrt{2}r}{2}$$
$$a = \sqrt{2} \times \frac{r}{2}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
</tr>
</table>

A letra a na figura representa a altura das patas (AP) e como o palito representa $\sqrt{2}$, esta será igual a $\frac{r}{2}\ palitos$, sendo $\frac{r}{2}$ um número inteiro, pois só utilizamos números pares para o raio. Ou seja, quando o raio for 2 cm, a altura das patas mede 1 palito e o comprimento do pescoço mede 2 palitos. Foi assim que conseguimos descobrir uma unidade de medida adequada para medir a AP e o CP.

Momentos da III parte da tarefa 1

1.º Momento: Apresentação do painel com as figuras, nesse painel os alunos foram medir com o palito o comprimento do pescoço e a altura das patas, que foram registadas numa tabela.

2.º Momento: Distribuição de uma ficha de trabalho onde continha a tabela que os alunos tinham feito. Depois da leitura das questões começaram a resolver as duas primeiras questões. Aqui os alunos tinham que escolher duas figuras e escrever o quociente da AP e quociente do CP, dessas duas figuras. Em seguida, era pedido que comparassem esses dois quocientes e registassem as suas conclusões.

3.º Momento: Demonstração e discussão dos resultados, alguns alunos foram ao quadro mostrar e explicar à turma como resolveram a questão.

Resolução esperada

Com base na tabela

Figuras	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Altura das patas	1	2	3	4	5	6	7	8
Comprimento do pescoço	2	4	6	8	10	12	14	16

Tabela 9 - Medidas da altura das patas e do comprimento do pescoço

Para escrever o quociente entre a mesma medida de duas figuras os alunos deverão:

1.º Escolher duas figuras, por exemplo, B e E.

2.º Escrever o quociente entre a AP e entre o CP das figuras que escolheram,

Quociente entre a AP das figuras B e E	Quociente entre o CP das figuras B e E
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$

Tabela 10 - Resolução esperada da questão 1 (parte III)

3.º Reconhecer que os dois quocientes são equivalentes estabelecendo uma relação de invariância entre as variáveis, ou seja, reconhecer que uma variável é o dobro ou a metade da outra. Também podem reconhecer a equivalência estabelecendo uma relação de covariação, ou seja, ambos os denominadores são produto da multiplicação do numerador por 2,5. O que significa que a AP da E foi ampliada 2,5 em relação à figura B.

IV parte da tarefa 1

Esta parte da tarefa (apêndice 4) também foi realizada numa aula de matemática e foi facultada uma ficha de trabalho para resolverem. O objetivo desta etapa é reconhecer situações onde não existe proporcionalidade direta, entre o perímetro e a área, além disso também pretendia relembrar conceitos já lecionados anteriormente. Na questão 1, com base na medida do raio os alunos calcularam o perímetro da circunferência grande. Na questão 2 calcularam a área da mesma circunferência, por fim, na questão 3 concluíram que o perímetro e a área de quaisquer duas figuras não aumentaram o mesmo número de vezes.

No que concerne à linguagem utilizada, esta tarefa permitiu aos alunos utilizarem uma linguagem verbal, na partilha de ideia no momento da discussão da tarefa. Na realização da tarefa, houve alunos que recorreram a tabelas para tirarem conclusões sobre a forma como o perímetro e a área aumentaram, outros recorreram a registos escritos. Também se pode referir a linguagem algébrica, na utilização das fórmulas da área e do perímetro Quanto às regras esta tarefa foi concretizada com recurso aos conhecimentos prévios que os alunos deviam ter sobre o cálculo da área e do perímetro. Além disso, foi evidente o estabelecimento de regularidades para concluir quantas vezes é que o perímetro e área das figuras foram aumentados. No que respeita à argumentação, o enunciado da questão 1.3 solicitava a argumentação dos alunos, assim com a discussão sobre a atividade desenvolvida.

Momento da IV parte da tarefa 1

1.º Momento: Distribuição de uma ficha de trabalho, depois de a investigadora ler a ficha de trabalho, os alunos procederam à sua resolução autonomamente.

2.º Momento: Demonstração e discussão dos resultados, a investigadora começou por recordar que na segunda parte da tarefa, depois de terem construído as figuras ampliadas fez-se uma tabela no quadro onde se registou o número de vezes que as figuras aumentaram em relação à primeira, então a investigadora propôs uma nova tabela, relacionando as diferentes figuras nas variáveis da AP, CP, perímetro e área, ou seja, os alunos iam registar o número de vezes que AP das figuras aumentaram em relação à primeira, o processo mantêm-se para as outras variáveis, como se pode verificar na seguinte tabela:

Relações	A e B	A e C	A e D	A e E	A e F	A e G	A e H
Altura das patas	2	3	4	5	6	7	8
Comprimento do pescoço	2	3	4	5	6	7	8
Perímetro	2	3	4	5	6	7	8
Área	4	9	16	25	36	49	64

Tabela 11 - Relações da AP, CP, Perímetro e Área

Resolução esperada

Questão 1.1

Cálculo do perímetro, utilizando a seguinte fórmula: $P = 2 \times \pi \times r$

Figuras	A	B	C	D	E	F	G	H
Perímetro	12.56	25.12	37.68	50.24	62.8	75.36	87.92	100.48

Tabela 12 - Resolução esperada da questão 1 (parte IV)

Questão 1.2

Calcular a área utilizando a fórmula: $A = \pi r^2$

Figuras	A	B	C	D	E	F	G	H
Área	12.56	50.24	113.04	200.96	314	452.16	615.44	803.84

Tabela 13 - Resolução esperada da questão 2 (parte IV)

Questão 1.3

Concluir que o perímetro e a área de quaisquer duas figuras não aumentam o mesmo número de vezes.

Tarefa 2 – Histórias Mágicas (Oficina de escrita)

Como forma de fazer a transversalidade com outras áreas, nomeadamente, Português e também como um meio e necessidade de trabalhar mais a componente de escrita, propôs-se à professora uma tarefa que consistia na criação de vários tipos de textos (todos eles relacionados com os patos), para que os alunos se apropriassem das suas características, uma vez que esse tema acabara de ser lecionado. Esta tarefa foi realizada numa aula de 90 minutos da unidade curricular de Português, tinha como descritores de desempenho, segundo o programa de Português do Ensino Básico (2009) escrever para construir e expressar conhecimentos, nomeadamente, sobre as características dos vários tipos de textos, e também escrever em termos pessoais e criativos, nomeadamente nos textos poéticos, dramáticos, banda desenhada ou textos narrativos, todos estes tipos de textos apelam à criatividade do aluno. Para atingir estes objetivos, os alunos devem ser capaz de formular um plano ou esboço, redigir um texto, rever o texto, aplicando procedimentos de reformulação e escrever textos por sua iniciativa, para expressar conhecimentos, experiências, sensibilidade e imaginário.

Para a realização desta tarefa foi pedido a cada aluno que escolhesse um dos tipos de textos que tinham sido lecionados, foi-lhes adiantado que os textos tinham de ser sobre patos ou um pato. Depois foi-lhes pedido que em casa fizessem um esboço do texto que gostariam de fazer, e no caso de escolherem um texto informativo tinham que fazer previamente uma pesquisa sobre os patos. Ao fazer esta pesquisa faz-se a transversalidade com as ciências naturais, pois segundo as Metas Curriculares do Ensino Básico de Ciências Naturais 5.º ano (2013), esta pesquisa enquadra-se no domínio "Diversidade de seres vivos e suas interações com o meio" e subdomínio "Diversidade nos animais", logo, segundo estas metas estão a interpretar as características dos organismos em função dos ambientes onde vivem, a compreender a diversidade de regimes alimentares dos animais tendo em conta o respetivo habitat, a compreender a diversidade de processos reprodutivos dos animais e a conhecer a influência dos fatores abióticos nas adaptações morfológicas e comportamentais dos animais, neste caso os animais são os patos.

Momentos da tarefa 2

1.º Momento: Distribuição de uma folha branca, por cada aluno, para que nela escrevessem os seus textos. Houve alunos que trouxeram um esboço feito, outros fizeram na aula.

2.º Momento: Apoio aos alunos, no decorrer da aula a investigadora e a professora cooperante circularam pela sala para apoiar os alunos e fazer algumas correções. À medida que os alunos iam acabando de escrever os textos, foi-lhes pedido que ilustrassem os mesmos.

3.º Momento: Proposta aos alunos, com o objetivo de fazer um livro com os textos produzidos pela turma do 5.º B. Os alunos adoraram a ideia e elegeram um título: "Histórias Mágicas".

O produto final desta tarefa foi um livro que reunia todos os textos produzidos pelos alunos do 5.º B que teve como titulo "Histórias Mágicas". Este livro fez parte da exposição final que tinha como objetivo mostrar à comunidade do Colégio toda a atividade desenvolvida sobre o raciocínio proporcional e tudo isto originou de um ovo que só podia ser mágico.

Para a realização destas tarefas, foi muito importante o apoio e opiniões das colegas estagiárias, bem como dos professores do Colégio D. José I que acompanharam todo o trabalho desenvolvido, nomeadamente, os professores cooperantes e o professor de ET. O tempo que disponibilizaram foi fundamental para a concretização desta investigação, assim como a experiência que estes professores possuem, as suas sugestões e recomendações que foram muito importantes.

Capítulo 5

Apresentação e discussão dos resultados

O processo de recolha de dados através da observação, registos dos alunos, notas de campo e do registo fotográfico, permitiu a aquisição de uma grande quantidade de informação acerca do modo como os alunos do 5.º ano utilizam o raciocínio proporcional, em que nível se encontram e que dificuldades é que apresentam na realização de tarefas que envolvem o raciocínio proporcional. Foram aplicadas 2 tarefas, estando a primeira dividida em 4 partes, duas implementadas nas aulas de ET e outras duas implementadas nas aulas de matemática. A segunda tarefa foi implementada numa aula de Português.

Forma como os dados foram analisados

A análise de dados, incidiu sobre as produções orais e escritas dos alunos relativas à resolução das tarefas, o registo de áudio das aulas, as notas de campo e as interações realizadas durante e após a realização das atividades. Estas interações permitiram aos alunos uma melhor compreensão do trabalho desenvolvido e permitiu à investigadora perceber algumas dificuldades dos alunos e orientá-los de forma a colmatá-las.

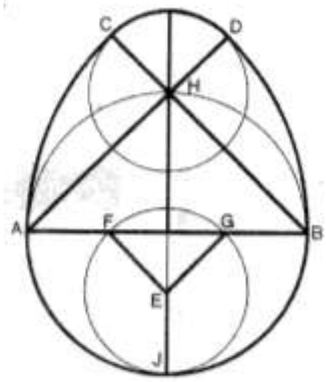
No momento seguinte, foram analisadas, separadamente, as respostas dadas pelos alunos, tendo por base os objetos matemáticos que intervém na solução dos problemas e as suas relações primárias. Essas respostas foram classificadas, para além das não respostas, em corretas e não corretas, considerando como respostas correta a que se esperava que o aluno respondesse, sendo alguns registos organizados num gráfico de barras. Esses resultados possibilitam a definição das seguintes categorias de análise: dificuldades apresentadas, procedimentos utilizados e fases do raciocínio proporcional em se encontram os alunos. Assim, no final da análise das respostas dos alunos será feito um resumo da informação mais importante em termos didáticos, que permitam uma análise dessas categorias.

Desta forma, e tendo por base estas categorias e as questões de estudo, pretende-se dar resposta às questões de investigação.

5.1. I Parte da tarefa 1

Nesta sessão, dia 26 de Abril de 2013, foi realizada a primeira parte da tarefa 1, numa aula de ET. Esta tarefa é um problema de construção de média duração e estrutura fechada, pois são indicados todos os passos necessários para resolver o problema e também está explicito o que é pedido. Nesta sessão estiveram presentes 29 alunos.

Questão 1



1. Desenha um segmento de reta AB com 4 cm de comprimento e traça a sua mediatriz perpendicular ao segmento de reta e à mesma distância dos pontos A e B.
2. Com o compasso com centro a meio do segmento de reta traça uma circunferência com um raio de 2 cm. e marca o ponto H e J.
3. Desenha os segmentos de reta AH e BH e prolonga-os.
4. Desenha os arcos BD e AC (com centro em A desenha o arco BD, com centro em B desenha o arco AC).
5. Desenha uma circunferência centrada em H que toca, os grandes círculos em C e D. Mantém o compasso com a mesma abertura para o passo seguinte.
6. Com o compasso com a mesma abertura do passo 5, com centro em J marca E.
7. Com a mesma abertura do passo 6 desenha uma circunferência centrada em E e marca os pontos F e G e une-os.
8. Desenha EF e EG. Corta as peças.

1.1. Com base nas instruções desenha o teu ovo.

Esta sessão foi realizada individualmente, pois pretendia-se que todos os alunos desenhassem o ovo. Inicialmente foram distribuídos os textos com as instruções do desenho do ovo e pediu-se que o desenhassem, obedecendo às instruções fornecidas, este devia ser desenhado na folha branca que também lhes foi facultada.

A questão 1 é constituída por uma alínea e pretendia-se que os alunos relembrassem alguns conceitos de geometria, como segmento de reta, circunferência, arcos, semicírculos, segmentos perpendiculares e aprendessem um conceito novo, mediatriz de um segmento de reta.

Dos 29 alunos, houve alunos que conseguiram fazer autonomamente, obedecendo a todos os passos da construção com o rigor que se pretendia, estas respostas foram consideradas corretas (figura 13). Os alunos que desenharam o ovo autonomamente, mas que apresentavam falta de rigor e erros de construção, em alguns passos foram considerados incorretos (figura 14), que na totalidade foram 19. Todavia houve 2 alunos que não conseguiram fazer sem ajuda.

As figuras seguintes apresentam um exemplo de uma resposta correta e uma resposta incorreta:

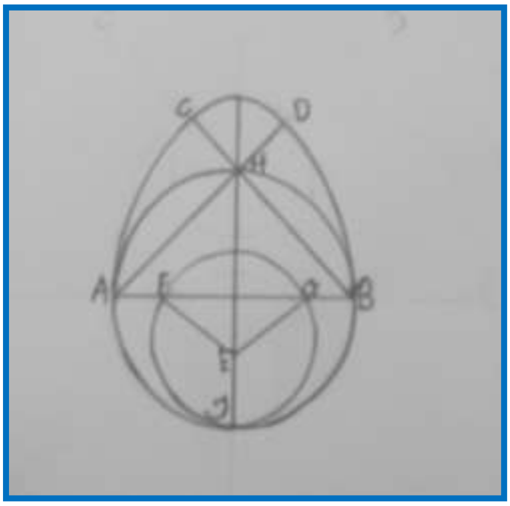


Figura 13 - Desenho correto

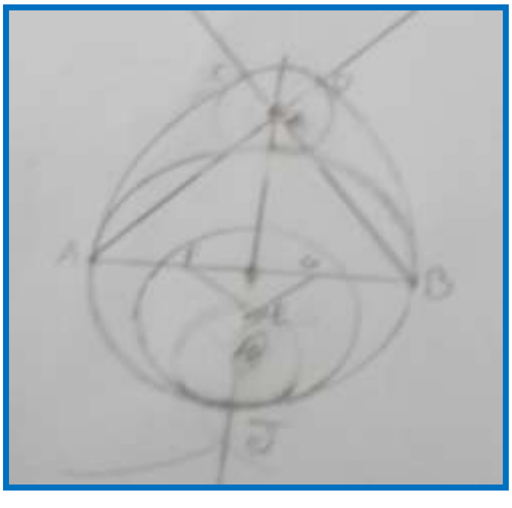


Figura 14 - Desenho incorreto

Na figura 13 verifica-se que o aluno obedeceu corretamente às instruções enunciadas. Apraz referir que o aluno contornou o desenho do ovo manualmente, daí verificar-se alguma falta de rigor no tracejado. A figura 14 apresenta um exemplo de uma construção incorreta, verifica-se que o aluno não obedeceu corretamente ao passo 3 do texto instrucional, onde tinha que marcar o ponto H que intersetava a grande circunferência. Este erro deu origem aos erros seguintes, nomeadamente à marcação dos pontos C e D que resultavam da interseção da circunferência com centro em H com os prolongamentos dos segmentos de reta AH e BH. Posteriormente os pontos E e F também foram marcados incorretamente.

A realização desta questão permitiu-nos analisar as dificuldades sentidas pelos alunos:

Dificuldades

A mediatriz de um segmento de reta foi o conceito que originou mais dificuldade, apesar de se ter o cuidado de o explicar, antes de os alunos darem início à construção. Depois de se dar algum tempo para realizarem a questão autonomamente e de se observar as dificuldades dos alunos fez-se, no quadro interativo, a construção, passo a passo.

Os alunos, no geral sentiram dificuldades em construir o ovo mágico, segundo o professor cooperante eles ainda não estão habituados a trabalhar com este tipo de construção geométrica, só o vão fazer no 6.º ano. Prova disso é o facto de não possuírem rigor na construção. Por exemplo para fazer a mediatriz muitos deles fizeram um segmento de reta com a régua a passar pelo centro, este procedimento iria dificultar a construção do ovo, uma vez que não garantiam a perpendicularidade. O aluno A13, assim como outros alunos, foi questionado pelo método que estava a utilizar na construção da mediatriz, e deu as seguintes respostas:

> ***Investigadora (I):*** *Como foi que traçaste esse segmento?* (não vi vestígios de ter traçado a mediatriz).
> ***Aluno (A):*** *Com a régua.*
> ***I:*** *Olha para o quadro, que ângulos formam a mediatriz.*
> ***A:*** *[pausa] ângulos retos.*

I: *Achas que tens ângulo retos?* (de facto, ao primeiro olhar parecia)

A: *Mas eu pus a régua e passei pelo centro.*

I: *Eu também posso pôr a régua a passar pelo centro e formar ângulos agudos e obtusos. Olha, repara.*

A: ***[****pausa]. Então posso usar o esquadro.*

I: *Podes, mas cuidado com o rigor. É mais rigoroso fazer como fiz no quadro (com o compasso), mas o teu método também está correto.*

Com base neste diálogo podemos concluir que eles ainda não dominam muito bem alguns conceitos geométricos e a utilização dos materiais geométricos. Outro fator que dificultou bastante a construção foi o facto de não terem compassos adequados a este tipo de tarefas, ou seja, estavam em mau estado. A construção do ovo implica um compasso bem ajustado e afiado, de modo a que a construção possa ser rigorosa. Por exemplo, ao traçarem o arco CD não ia dar certo com os grandes arcos AC e BD.

Este facto, aliado às dificuldades apresentadas pelos alunos prova que ainda não são rigorosos a fazer construções geométricas.

5.2. II Parte da tarefa 1

Esta tarefa foi realizada no dia 3 de Maio, com a mesma turma e o mesmo número de alunos que na sessão anterior. Para esta sessão estava destinado a realização da segunda parte da tarefa, esta demorou mais tempo que o previsto. A duração da tarefa foram dois blocos de 90 minutos cada um. As tarefas desta segunda parte são problemas de natureza exploratória pois, pretende-se que os alunos mobilizem as suas capacidades intuitivas. A tarefa era constituída por quatro questões, das quais uma (constituída por duas alíneas) se encontra mais direcionada para o objetivo deste estudo, o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Foi distribuído por cada grupo uma folha de cartolina e pretendia-se que eles num primeiro momento descobrissem quantas vezes o diâmetro da circunferência grande do ovo cabe na largura da cartolina dada. Esta sessão foi elaborada em grupos, foram formados 7 grupos, sendo 6 grupos de 4 elementos e 1 grupo de 5 elementos. Antes de os alunos começarem a trabalhar, as questões foram lidas e clarificadas, para que não surgisse dúvidas acerca do que era pedido, pois já se tinha verificado que alguns alunos têm dificuldades na interpretação das questões e afirmações apresentadas. Todavia, não implica que não ajudasse os alunos durante a realização das questões, já tinha percebido que este tipo de tarefas era novidade para eles, por isso, era natural que sentissem dificuldades e chamassem o professor por não encontrarem resposta imediata, decorrente da falta de compreensão da natureza da tarefa.

Questão 1

1.1. Comparem o diâmetro da circunferência grande do ovo com a largura da cartolina. Justifiquem a vossa resposta.

1.2. Com base na comparação que fizeram, ampliem o ovo.

Na questão 1.1., dos 7 grupos que a realizaram 5 responderam corretamente. Como respostas corretas foram consideradas aquelas cujos grupos conseguiram determinar quantas vezes o diâmetro cabia na largura da cartolina. Como podemos verificar nas figuras seguintes:

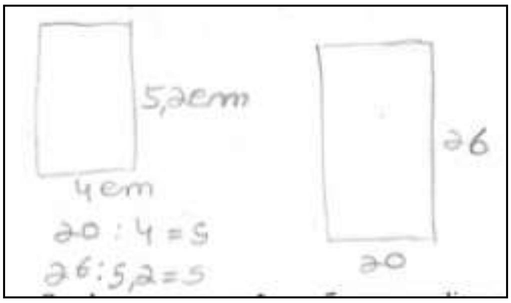


Figura 15 - Resposta do G2

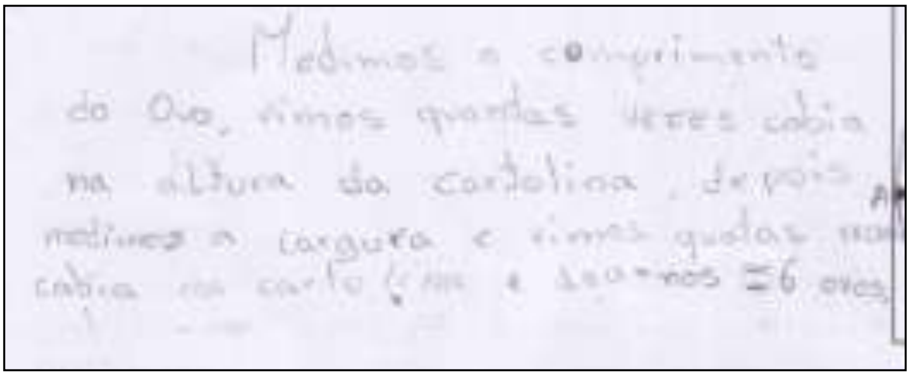


Figura 16 - Resposta do G5

Ambas as figuras representam exemplos de respostas corretas, obedecendo ao critério adotado para estas respostas, embora com diferentes tipos de representação. O G2 utilizou o desenho para raciocinar sobre o problema, pois é através da representação que ficamos a saber como é que o aluno pensou e organizou o pensamento. Segundo o NCTM (2007, p. 240) “As representações ajudam a retratar, esclarecer ou aprofundar uma ideia matemática, realçando as suas características essenciais.” Neste caso este grupo intuitivamente encontrou a razão de semelhança, conceito que estava implícito neste problema.

Foram consideradas como respostas incorretas aquelas cujos grupos não conseguissem calcular quantas vezes o diâmetro da circunferência grande cabia na largura da cartolina, um exemplo desta resposta foi dado pelo G4 como se pode verificar na figura seguinte:

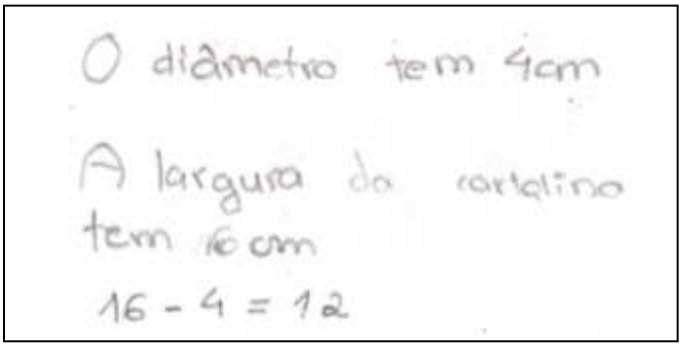


Figura 17 - Resposta do G4

Este grupo determinou a diferença entre a largura da cartolina e o diâmetro da circunferência grande do ovo, portanto estabeleceu uma relação aditiva, facto este que pode estar associado ao significado de comparação que atribuiu ao termo de razão.

Para clarificar o seu raciocínio o grupo foi questionado pela investigadora:

I: *Porque é que subtraíste?*
G4: *Para saber a diferença.*
I: *Achas que na largura da cartolina cabem doze ovos?*
G4: *Não!*
I: *Então quantos cabem?*
G4:*[pausa]*
Os alunos, utilizando os dedos como medida responderam:
G4: *São 4*

I: *Então que operação devias ter utilizado para teres o 4 como resposta?*

G4: *[pausa] Divisão.*

Verificou-se que este grupo não compreendeu a estrutura multiplicava envolvida no problema, aplicando um processo aditivo. No entanto durante o diálogo com a investigadora verifica-se que o porta-voz do grupo chegou ao resultado correto estimando quantos diâmetro cabiam na cartolina, utilizou o espaço entre dois dedos como unidade de medida. O G1 também respondeu incorretamente, não registou por escrito mas explicou oralmente como chegou ao resultado:

I: *Porque ainda não responderam?*

G1: *Já sabemos a resposta.*

I: *Então qual é?*

G1: *Dá 7.*

I: *Explica-me como chegaste a esse resultado.*

O porta-voz começou a contar com os dedos, ou seja, utilizou o espaço entre dois dedos como medida (como o G4) do diâmetro e depois contou na largura da cartolina quantos espaços cabiam e desta vez deu-lhes 6. Apraz referir que a largura da cartolina deste grupo media 32 cm. Então foi sugerido que confirmassem com a régua. O raciocínio estava correto, mas era baseado numa estimativa, o que nem sempre resultam em valores exatos. No entanto, neste caso, o erro no cálculo, da razão de semelhança também se deve ao facto de a cartolina ser grande e isso dificultou a tarefa. Pois o G6, cuja cartolina media de largura 12 cm respondeu corretamente utilizando o mesmo processo, embora uma estimativa nem sempre é exata.

A questão 1.2. consistia em ampliar o ovo, os grupos, embora, no geral, conseguissem saber sem dificuldades quantas vezes tinham que ampliar o ovo, a maior parte não conseguiu ampliá-lo na cartolina grande. Tornou-se necessário fazer intervenção em cada grupo. Houve 2 grupos que conseguiram começar, mas os outros não estavam a conseguir. Três grupos começaram por construir o segmento de reta AB a meio da cartolina e depressa verificaram que não estava correto, pois ao continuarem o ovo perceberam que o ovo não cabia na cartolina. O G5 foi um dos grupos que tinha conseguido começar, então pedi ao porta-voz, o aluno A25 que explicasse aos colegas como conseguiu.

A25: *Na minha cartolina grande cabiam 6 ovos, então tinha que aumentar 6 vezes o espaço da base da cartolina ao segmento de reta AB.* (O aluno explicou, mostrando o ovo ampliado na cartolina)

I: *E que espaço é esse?*

A25: *É o raio.*

I: *Estás a dizer que o raio tinha que ser 6 vezes maior, então o que é que vai acontecer às peças do ovo quando o ampliarmos?*

A25: *Aumentam também 6 vezes, como é lógico.*

Questão 3

2. Com as peças do ovo, constrói uma figura igual à representada.

Esta questão não está diretamente relacionada com o tema em questão, contudo está relacionada com o tema geometria e consta do programa de matemática do 1.º ciclo, mais especificamente do 3.º e 4.º ano, nomeadamente no tópico “Figuras no plano”, com o objetivo especifico de resolver problemas envolvendo visualização. Esta capacidade engloba um conjunto de aspetos relacionados com a perceção que os alunos têm sobre o mundo que os rodeia e como o representam.

Em função dos resultados obtidos, constata-se que os alunos têm muita dificuldade na visualização e representação de figuras, pois nenhum grupo foi capaz de construir a figura ilustrada, como se pode verificar nas figuras 18 e 19. Sendo necessário dar a solução para que todos os grupos pudessem construir a figura.

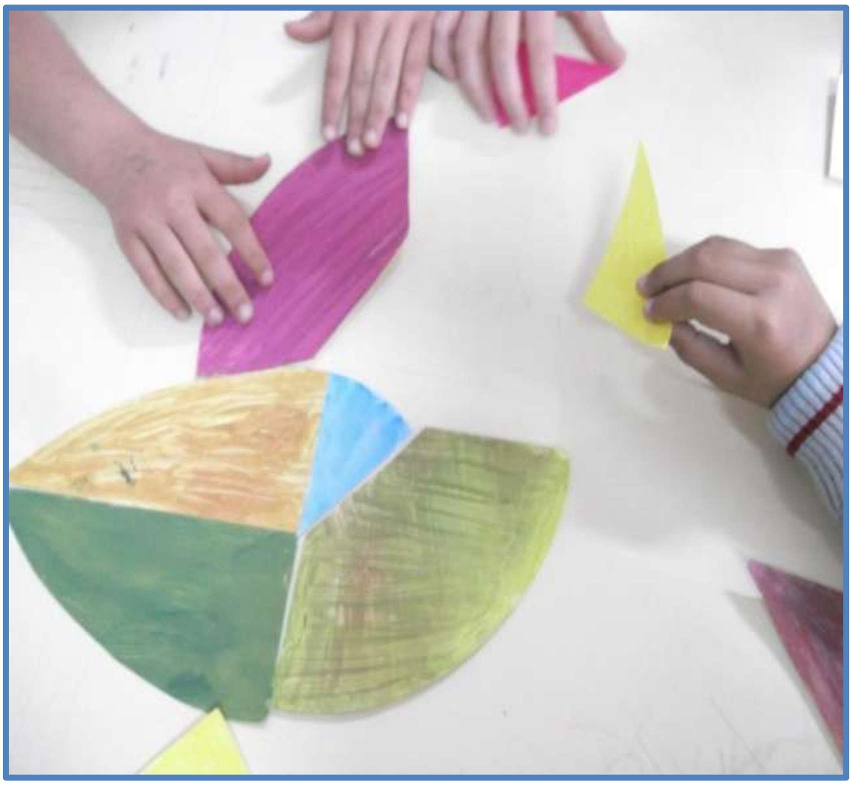


Figura 18 - Construção do pato (G1)

Figura 19 - Construção do pato (G5)

Questão 4

4. Demonstração e discussão dos resultados.

No final desta sessão foi feito um balanço do resultado final, ou seja, cada grupo foi mostrar a sua figura (pato) para a turma e disse quantas vezes ampliou o ovo, que deu origem ao respetivo pato. Esses foram colocados no quadro para que verificassem como as figuras foram aumentando, como se verifica na figura seguinte:

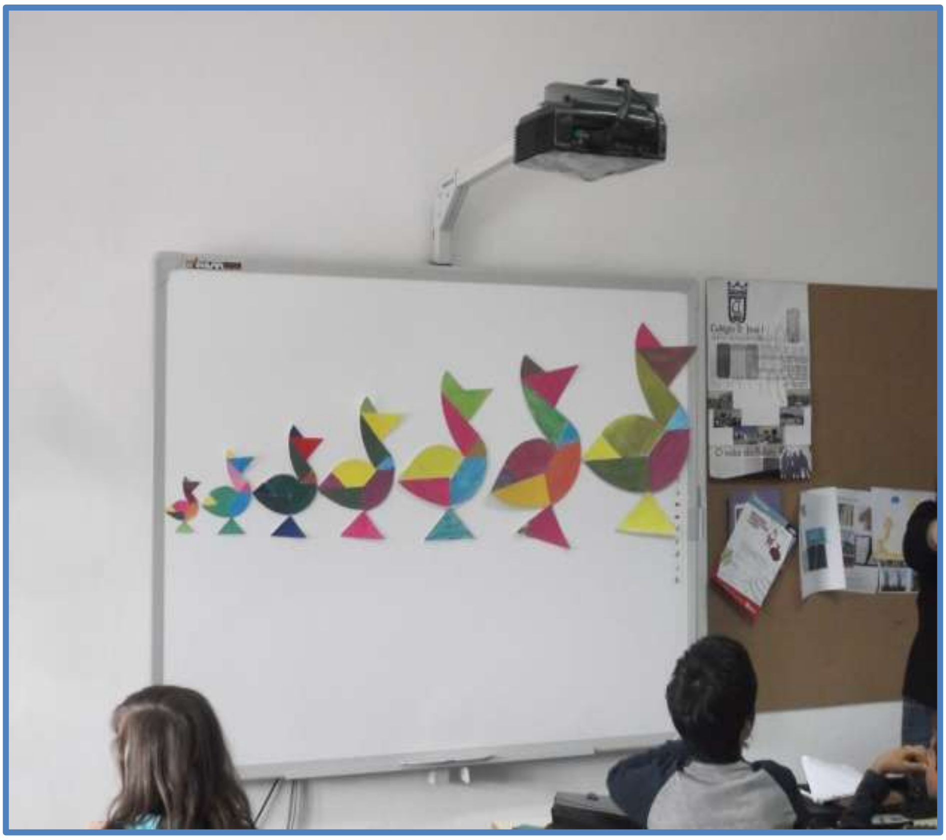


Figura 20 - Figuras ampliadas

Depois, foi sugerido a cada grupo que construísse uma tabela com todas as figuras e a largura da cartolina que lhes deu origem, indicando ainda o número de vezes que as figuras foram ampliadas.

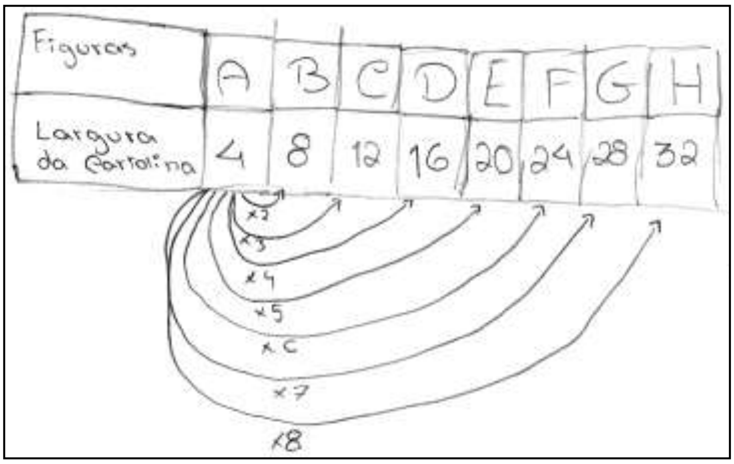


Tabela 14 - Tabela realizada pelo G3

Em seguida, questionou-se a turma em geral, surgindo o seguinte diálogo:

I: *Então e se eu comparasse a largura da cartolina da figura B com a da figura C, quantas vezes é que a figura C tinha sido ampliada?*

A21: *4 vezes, porque a diferença é 4.*

A25: *Não pode ser!*

I: *Porquê?*

A25: *Porque a largura da figura B não cabe 4 vezes na largura da figura C.*

I: *Percebeste A21?*

A21: *Percebi, então [pausa]. Não dá, 1 vez sobra espaço e 2 vezes não cabe.*

A25: *Cabe 1.5 vezes.*

I: *Explica ao teu colega e ao resto da turma como chegaste a esse valor, porque pode haver mais colegas com essa dúvida.*

A25: *Fácil, 8 vezes 1.5 dá 12.*

Apraz referir que o aluno A25, é um aluno muito participativo e com aproveitamento excelente não só a matemática, como às restantes áreas curriculares. O aluno A21, também é bastante participativo, mas ao contrário do colega apresenta bastantes dificuldades de aprendizagem, conforme se pode verificar no gráfico 1, sobre o aproveitamento da turma na aula de matemática. O objetivo da minha intervenção era verificar se existiam mais alunos com um raciocínio aditivo, uma vez que anteriormente tinha sido detetado este tipo de processo.

Com base na análise das respostas dos alunos durante estas duas sessões permitiu-nos definir alguns aspetos das seguintes categorias:

Dificuldades

Com base nas respostas erradas de alguns grupos e nas transcrições das produções orais dos alunos, podemos verificar as seguintes dificuldades:

- Identificar a estrutura multiplicativa envolvida nas questões que envolvem raciocínio proporcional, recorrendo a processos aditivos;
- Perceber que quando uma figura aumenta, os seus segmentos também aumentam o mesmo número de vezes, usando para isso a multiplicação, prova disso foi o facto de os alunos não conseguirem ampliar o ovo;
- Associaram a ampliação à adição, na demonstração e discussão dos resultados, houve um aluno que fez a diferença para saber quantas vezes é que uma figura aumentou em relação a outra figura;
- Resolver problemas que envolvem a construção de uma figura a partir da visualização.

Procedimentos

Com base nas respostas dos grupos e nas transcrições das produções orais dos alunos, podemos verificar os seguintes procedimentos:

- Cálculo intuitivo da razão de semelhança; através de uma estratégia funcional (constante de proporcionalidade), conforme consta no enquadramento teórico no tópico 2.5 um raciocínio funcional é aquele que ocorre quando a transformação é feita entre os dois espaços de medida.
- Estratégia aditiva, comparando o diâmetro da circunferência grande do ovo com a largura da cartolina, através da sua diferença (1 grupo);
- Utilização de estimativas, para fazer a comparação do diâmetro da circunferência grande do ovo com a largura da cartolina, os alunos utilizaram o espaço entre dois dedos como unidade de medida. Este raciocínio baseado em estimativas ou habilidades

percetuais é muito interessante pois propicia a passagem de formas qualitativas de raciocínio para formas quantitativas precisas.

Fase do desenvolvimento do raciocínio proporcional

Perante as respostas analisadas existem alunos que apresentam um raciocínio aditivo, ou seja, encontram-se numa fase inicial do raciocínio proporcional, pois, Lesh, Post e Behr (1988) sublinham "os seguidores de Piaget argumentam que numa fase inicial, as capacidades de raciocínio proporcional das crianças envolvem frequentemente "raciocínio aditivo" na forma $A - B = C - D$". Estes autores também referem, conforme consta no enquadramento teórico no tópico 2.4., que um dos estádios observados no desenvolvimento de capacidades de raciocínio proporcional passa por tentativas de quantificação que envolvem mais relações aditivas que relações multiplicativas.

Embora, a maior parte dos alunos conseguissem intuitivamente chegar à razão de semelhança, não conseguiram ampliar o ovo, demonstrando, mais uma vez, estar num nível muito baixo de raciocínio proporcional.

5.3. III Parte da tarefa 1

Esta sessão tem como objetivos estabelecer relações proporcionais, mais concretamente relações de covariação das variáveis e de invariância entre variáveis e equivalência de frações, pois segundo Silvestre e Ponte, (2009)[7] uma das condições que envolve o raciocínio proporcional é a compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais. Além disso, esta sessão também teve o objetivo de levar as figuras para a aula de matemática, ou seja, esta sessão coincidia com a 2ª aula do tema equivalência de frações, então era interessante trabalhar esse tema com as figuras.

Antes de começarem a trabalhar na ficha de trabalho os alunos mediram, utilizando um palito como unidade de medida, a AP e o CP do pato. Ao mesmo tempo iam preenchendo a tabela que foi depois apresentada na ficha de trabalho.

[7] Citado por Silvestre e Ponte, 2012

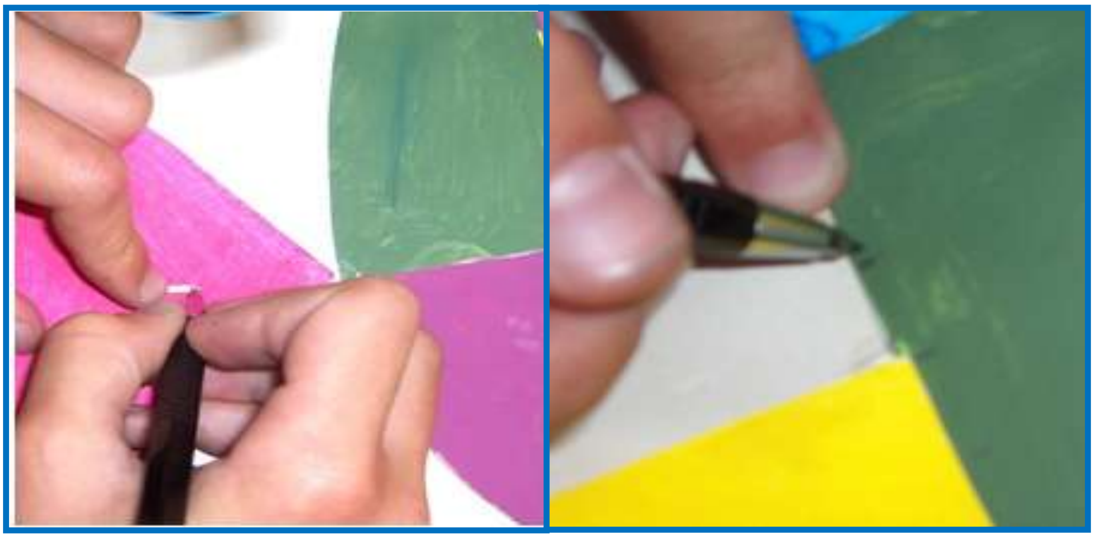


Figura 21 - Medição da AP e do CP

Questão 1

1. Observa a tabela:

Figuras	A	B	C	D	E	F	G	H
Altura das patas	1	2	3	4	5	6	7	8
Comprimento do pescoço	2	4	6	8	10	12	14	16

1.1. Escreve o quociente entre a altura das patas de duas figuras à tua escolha.

1.2. Escreve o quociente entre o comprimento do pescoço das duas figuras que escolheste anteriormente.

1.3. Compara as frações que obtiveste e regista a tua conclusão.

As questões 1.1. e 1.2. consistiam em escolher duas figuras e escrever o quociente da AP e do CP, estas questões, quanto ao tipo de tarefas classificam-se em exercícios de estrutura fechada. No entanto, as suas respostas vão ser uteis para o problema da questão 1.3. a qual vamos apresentar. Dos 29 alunos todos conseguiram responder corretamente, ou seja, todos escolheram duas figuras e escreveram os respetivos quocientes.

A questão 1.3. consiste em estabelecer diferentes relações proporcionais, nomeadamente de covariação de variáveis e invariância entre variáveis e reconhecer a sua equivalência. Como respostas corretas consideraram-se aquelas que se estabeleceram relações multiplicativas, reconhecendo implicitamente a equivalência de frações, e aquelas cuja equivalência das frações foi reconhecida explicitamente. A esta questão responderam corretamente 21 alunos, incorretamente 1 aluno e 7 alunos não conseguiram estabelecer nenhuma relação entre os dois quocientes.

A resposta incorreta mostra que a aluna não compreendeu a estrutura desta relação, adicionando ambos os numeradores e adicionando ambos os denominadores.

Das respostas corretas podemos referir diferentes situações:

1. Apenas disseram que eram equivalentes sem justificar

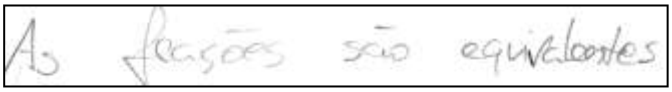


Figura 22 - Resposta realizada pela aluna A24

2. Reconheceram que eram equivalentes através da igualdade de quocientes

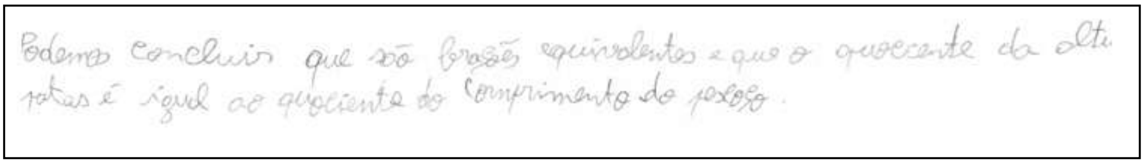


Figura 23 - Resposta realizada pelo aluno A9

3. Estabeleceram relações de invariância entre as variáveis, ou seja, entre os numeradores e entre os denominadores de ambas as frações, reconhecendo, não explicitamente, a sua equivalência.

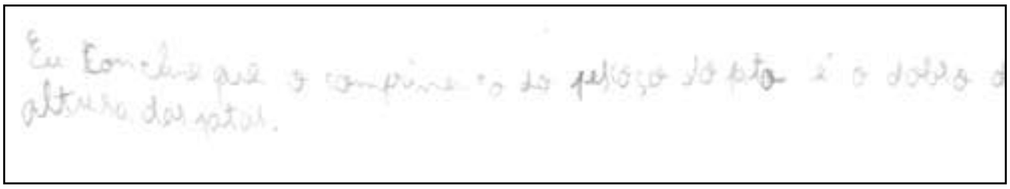
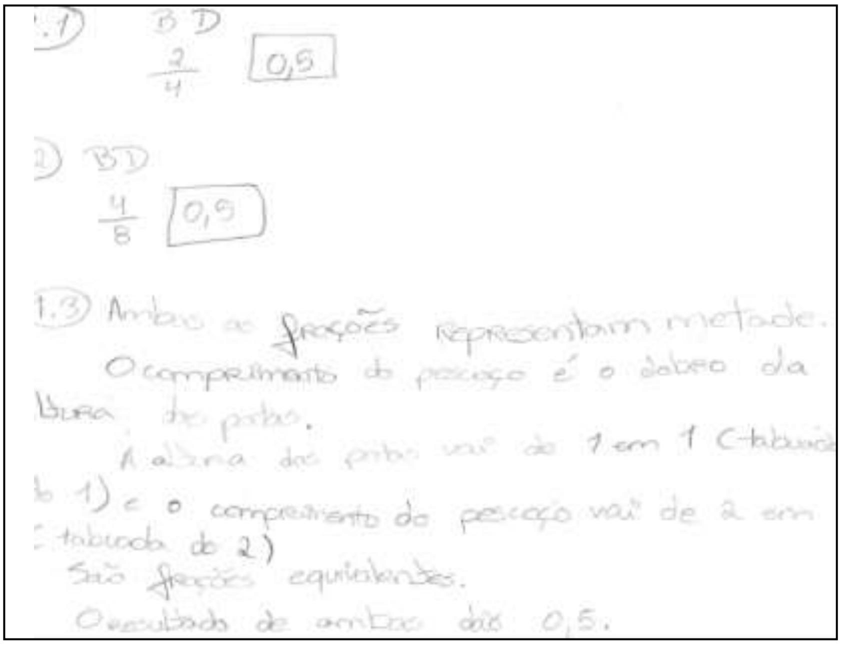

Eu Conclui que o comprimento do pescoço do pato é o dobro da altura das patas.

Figura 24 - Resposta realizada pelo aluno A15

4. Estabeleceram relação de covariação das variáveis e as relações referidas nos pontos 2 e 3.


1.1) BD $\frac{2}{4}$ $\boxed{0,5}$

1.2) BD $\frac{4}{8}$ $\boxed{0,5}$

1.3) Ambas as frações representam metade.
O comprimento do pescoço é o dobro da altura das patas.
A altura das patas vai de 1 em 1 (tabuada do 1) e o comprimento do pescoço vai de 2 em 2 (tabuada do 2)
São frações equivalentes.
O resultado de ambas dá 0,5.

Figura 25 - Resposta realizada pela aluna A5

Das respostas consideradas corretas podemos referir quatro situações que constam do gráfico 3.

1. Apenas disseram que eram equivalentes sem justificar.
2. Reconheceram que eram equivalentes, através da igualdade de frações.
3. Reconheceram a invariância entre variáveis.
4. Reconheceram a covariação das variáveis.

Gráfico 2 - Justificações utilizadas nas respostas corretas

A resposta da A5, foi o tema da discussão realizada no final da tarefa, pela diversidade de relações que conseguiu estabelecer. A aluna começou por dizer que o CP é o dobro da AP, estabelecendo uma relação de invariância entre variáveis, depois refere que a AP "vai de um em 1" e o CP "vai de 2 em 2". Nesta parte da sua explicação foi pedido que explicasse melhor:

I: *O que significa "vai de um em um" e "vai de dois em dois"*

A5: *Fiz a tabuada do 1 e do 2.*

I: *Como assim fizeste +1 +1 +1 …*

A5: *Não, fiz a tabuada.*

I: *Explica melhor, exemplifica no quadro.*

A aluna foi ao quadro e foi-lhe pedido que exemplificasse numa tabela, que se segue.

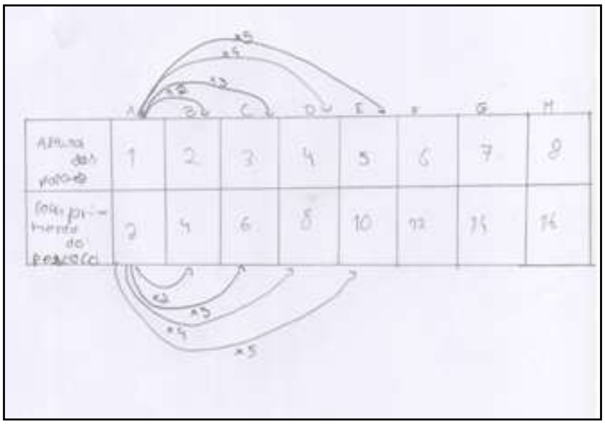


Tabela 15 - Cópia da tabela realizada no quadro

Com esta explicação percebeu-se que de facto ela estabeleceu uma relação de covariação das variáveis, contudo nas figuras que escolheu a aluna não conseguiu reconhecer essa relação, o que é compreensível, pois quando se leciona o tópico frações equivalentes só se aprende a reconhecer a equivalência pela relação de invariância, conforme aparece nos manuais, não explorando diretamente a covariação das variáveis. Por esse motivo, questionou-se a aluna:

I: *Porque não fizeste o mesmo com as figuras que escolheste?*
A5: *Não estou a perceber.*
I: *Tu escolheste as figuras B e D, repara o que acontece de uma para a outra?*
A5: *[Pausa] A figura D é o dobro da figura B.*

Para que não restassem dúvidas pediu-se que representasse simbolicamente, no quadro, a equivalência dos quocientes das figuras que escolheu, depois foi pedido aos alunos outros quocientes de duas figuras para fazer o mesmo processo, como demonstra a figura seguinte:

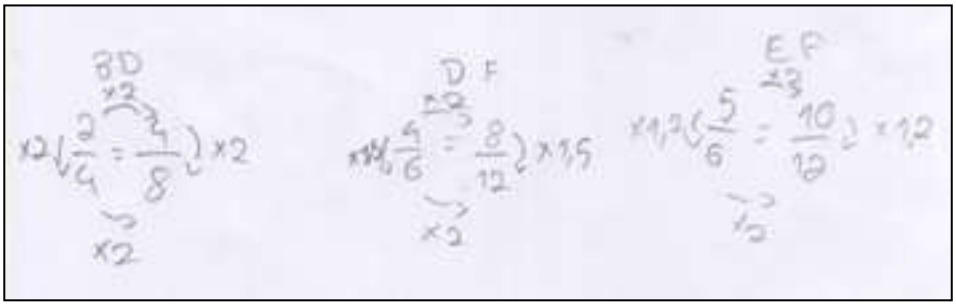


Figura 26 - Cópia das representações realizadas no quadro

Para finalizar foi colocada à turma a seguinte questão: "*Se na tabela fosse colocada uma nova figura I, em que a AP medisse 24 palitos e o CP medisse 48 palitos, quantas vezes é que tínhamos que ampliar a AP e o CP da figura H?"* Neste momento da sessão uma grande parte da turma colocou o dedo no ar e respondeu corretamente **"***três vezes"*. Esta questão deu lugar à seguinte questão: "*O que aconteceu à relação entre a AP e o CP?"* A maioria também respondeu corretamente, uns responderam que o CP é o dobro do AP, outros responderam que ficou na mesma, embora a primeira resposta esteja correta, a segunda resposta foi mais valorizada pelo facto de admitirem que o número de vezes que a figura foi ampliada mudou mas a relação entre as variáveis manteve-se. Estas questões foram realizadas durante a interação com a turma, por esse motivo não foram quantificadas, mas uma grande parte dos alunos foi ao encontro do que era pretendido.

Desta forma, pode-se dizer que esta tarefa ajudou a desenvolver a capacidade de raciocínio proporcional, mostrando as diversas relações multiplicativas que se encontram numa relação de proporcionalidade, contrariando a ideia que os problemas que envolvem relações proporcionais têm sempre de ser resolvidos usando a regra de três simples. Além disso, concluiu-se que figuras obtidas por ampliação mantêm a razão entre as medidas correspondentes, desenvolvendo capacidades cognitivas na semelhança de figuras.

Com base na análise das respostas dos alunos durante esta sessão permitiu-nos definir alguns aspetos das seguintes categorias:

Dificuldades

Com base nas respostas erradas de alguns alunos e nas transcrições das produções orais dos alunos, podemos verificar as seguintes dificuldades:

- Reconhecer a equivalência de frações, pois verificou-se que 7 alunos não estabeleceram relação nenhuma e 1 aluna adicionou ambos os numeradores e ambos os denominadores;
- Justificar as respostas, pois quatro alunos não justificaram porque é que as frações eram equivalentes, não se percebendo o tipo de raciocínio utilizado;
- Reconhecer a similaridade estrutural, ou seja, reconhecer o mesmo padrão de relações ou de operações e reconhecer que as suas componentes estão multiplicativamente relacionadas. Segundo Lesh, Post e Behr (1988, p. 9) "Uma compreensão do raciocínio proporcional deve ir além da simples noção de que dois lados de uma equação são iguais".
- Reconhecer a covariação de variáveis numa relação de equivalência.

Apraz referir que a discussão no final da sessão contribuiu para que se ultrapassassem estas dificuldades.

Procedimentos

Com base nas respostas dos grupos e nas transcrições das produções orais dos alunos, podemos verificar os seguintes procedimentos:

- Reconhecimento da equivalência de frações através de relações de invariância entre variáveis que segundo Lamon (1994) citado por Ponte, Silvestre Garcia e Costa (2010) mencionado no enquadramento teórico no tópico 2.5. são consideradas estratégias funcionais (entre variáveis)
- Reconhecimento da equivalência de frações através da igualdade entre frações.
- Identificação de regularidades para estabelecer a relação entre AP e o CP. Houve uma aluna que verificou que a AP era a tabuada do 1 e o CP era a tabuada do dois, pela demonstração do seu raciocínio podemos verificar que estabeleceu uma relação de covariação logo, segundo Lamon (1994) citado por Ponte, Silvestre Garcia e Costa (2010), utilizou uma estratégia escalar.

Fase do desenvolvimento do raciocínio proporcional

Perante as respostas analisadas parece que alguns alunos demonstram não ter raciocínio proporcional, apresentando-se no nível 0 segundo Langrall e Swafford (2000) citado por Costa (2007, p.12), mencionado no enquadramento teórico no tópico 2.4., estes alunos não reconhecem relações multiplicativas. Contudo, também existem alunos que se apresentam no nível seguinte, ou seja, informal, ao observar relações qualitativas e usarem modelos para compreenderem as situações.

5.4. IV Parte da tarefa 1

Esta sessão foi realizada em 60 minutos e tinha como objetivo principal identificar a falta de proporcionalidade direta entre o perímetro e a área de duas figuras semelhantes. Para isso, foi planeada uma situação onde as variáveis não eram diretamente proporcionais, que consistia em calcular o perímetro e a área da circunferência grande do ovo e posteriormente compararem essas duas variáveis e registarem as conclusões a que chegaram. As questões 1.1. e 1.2. são considerados exercícios e o seu objetivo é rever a matéria já lecionada, ou seja, consolidar matéria, a questão 1.3. pode-se considerar um problema de natureza exploratória.

Questão 1

Sabes as medidas do raio que deu origem a cada um dos patos, mas ainda não descobriste o que aconteceu à área e ao perímetro de cada uma das figuras. Agora vais descobrir!

Figuras	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Raio da circunferência grande	2	4	6	8	10	12	14	16

1.1. **Indica** o perímetro da circunferência grande para cada uma das figuras.

1.2. **Indica** a área da circunferência grande para cada uma das figuras.

1.3. **Regista** a tua conclusão.

Nas questões 1.1.e 1.2. foram consideradas respostas corretas todas as respostas em que o perímetro e a área foram bem calculados, aplicando as fórmulas corretamente. Na questão 1.3 foram consideradas respostas corretas todas as que mostram que a área não aumenta o mesmo numero de vezes que o perímetro.

Dos 29 alunos 23 responderam corretamente à questão 1.1. e 6 responderam incorretamente. À questão 1.2., 20 alunos responderam corretamente e 9 responderam incorretamente. No que concerne à questão 1.3. houve 18 respostas corretas e 11 respostas incorretas.

As questões 1.1. e 1.2. têm como objetivo relembrar outros conceitos, já lecionados, todavia houve alunos que não conseguiram resolver as questões por não aplicarem corretamente as formulas do perímetro e da área.

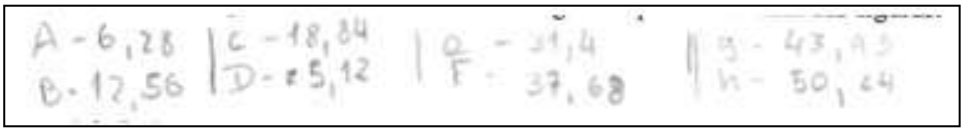


Figura 27 - Resolução realizada pelo aluno A21

Este aluno apresentou um cálculo incorreto do perímetro porque não utilizou a fórmula correta $P = 2 \times \pi \times r$, em vez desta utilizou $P = \pi \times r$.

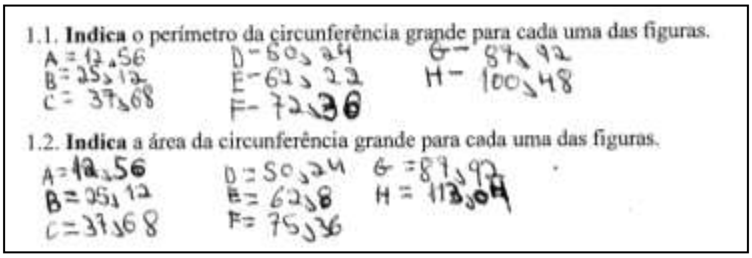

1.1. **Indica** o perímetro da circunferência grande para cada uma das figuras.
A = 12,56
B = 25,12
C = 37,68
D - 50,24
E - 62,22
F - 72,36
G - 87,92
H - 100,48
1.2. **Indica** a área da circunferência grande para cada uma das figuras.
A = 12,56
B = 25,12
C = 37,68
D = 50,24
E = 62,8
F = 75,36
G = 87,92
H = 113,04

Figura 28 - Resolução realizada pelo aluno A22

A falha deste aluno foi não reconhecer que r^2 é diferente de $r \times 2$, pois ao ser confrontado ele referiu corretamente as fórmulas.

A alínea 1.3. tem como objetivo identificar a não existência de invariância entre as variáveis área e perímetro das figuras. Nesta questão houve um menor número de respostas corretas, a este número de respostas incorretas está associada a utilização incorreta das fórmulas, como neste caso:

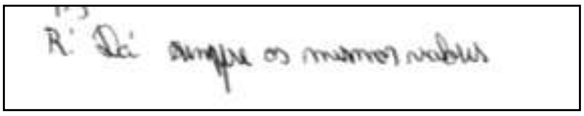


Figura 29 - Resolução realizada pelo aluno A22

As respostas corretas revelaram que os alunos recorrem, mais uma vez a relações multiplicativas, como metade de, o dobro de, o triplo de, pondo em evidência as regularidades numéricas das variáveis. Como podemos verificar pelas respostas dadas por alguns alunos:

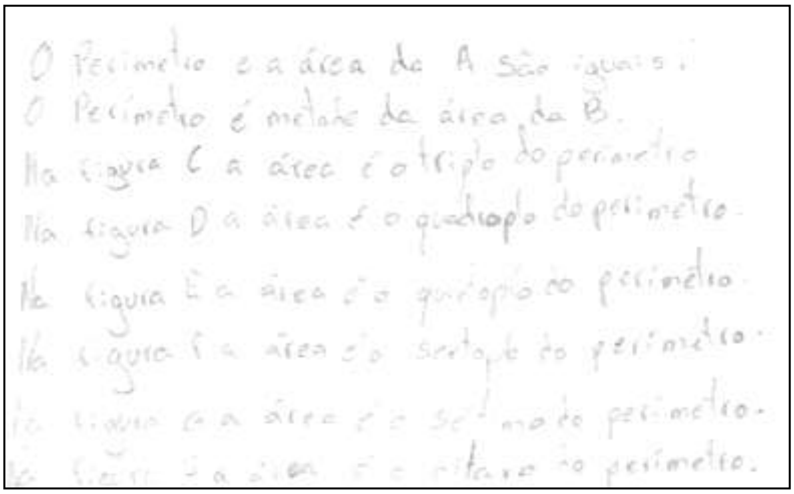
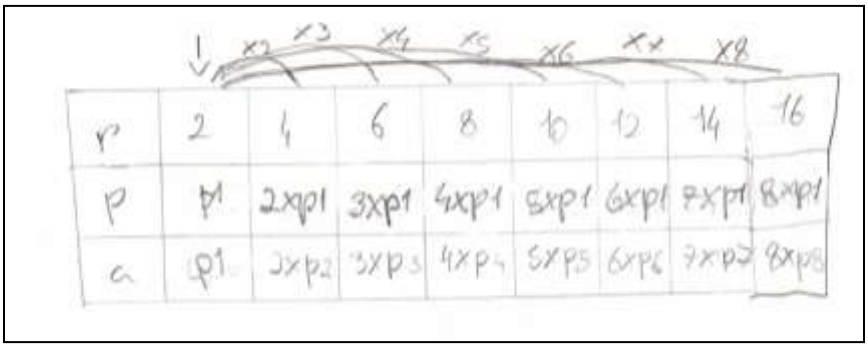

O Perímetro e a área da A são iguais.
O Perímetro é metade da área da B.
Na figura C a área é o triplo do perímetro
Na figura D a área é o quádruplo do perímetro.
Na figura E a área é o quíntuplo do perímetro.
Na figura F a área é o sêxtuplo do perímetro.

Figura 30 - Resolução realizada pela aluna A8

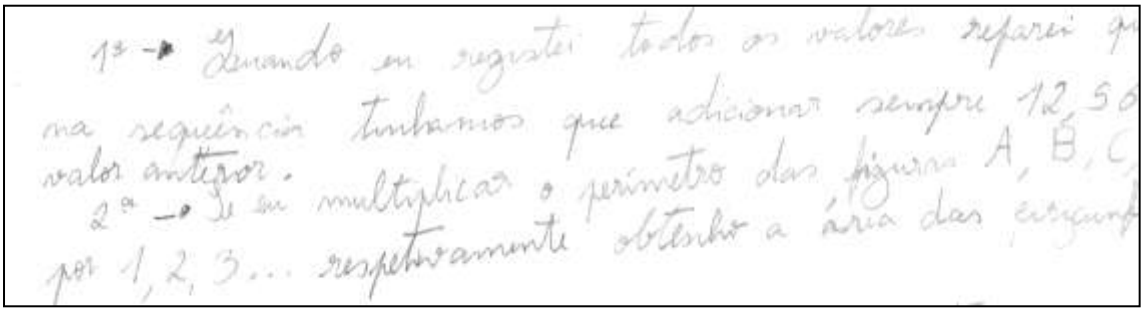


r	2	4	6	8	10	12	14	16
P	P1	2xp1	3xp1	4xp1	5xp1	6xp1	7xp1	8xp1
A	P1	2xp2	3xp3	4xp4	5xp5	6xp6	7xp7	8xp8

Figura 31 - Resolução realizada pela aluna A24

Esta aluna, na última linha da tabela que construiu, relacionou a área com o perímetro em cada figura, tal como a aluna anterior (A8), podendo concluir que a relação não se mantém entre cada duas figuras, ou seja, não existe invariância entre as variáveis perímetro e área. Para além disso a aluna A24 identificou ainda a existência de proporcionalidade direta entre a medida do raio e o perímetro quando nas primeiras duas linhas da tabela reconheceu a covariação das variáveis raio e perímetro entre a primeira e as restantes figuras.

O aluno A25, também estabeleceu relações multiplicativas de modo semelhante:



1º → Quando eu registei todos os valores reparei qu
na sequência tínhamos que adicionar sempre 12,56
valor anterior.
2º → Se eu multiplicar o perímetro das figuras A, B, C
por 1, 2, 3... respetivamente obtenho a área das circunf

Figura 32 - Resolução realizada pelo aluno A25

No entanto na sua primeira abordagem efetua um raciocínio aditivo correto ao reconhecer uma regularidade no perímetro das figuras. Contudo este raciocínio aditivo traduz-se num raciocínio multiplicativo, uma vez que:

P1=12,56 =12,56 x 1

P2=P1+12,56 =12,56+12,56=12,56 x 2

P3=P2+12,56=12,56+12,56+12,56=12,56 x 3

…

Na discussão final foi feita uma revisão das relações estabelecidas na sessão anterior, com o objetivo de os alunos compreenderem situações onde existe proporcionalidade direta de situações onde não existe, sem usar este termo. Foi registado numa tabela, no quadro, as relações existentes entre a AP e o CP de duas figuras e acrescentou-se a relação entre os perimetros e as areas das mesmas, de modo a concluir que a AP, CP e perimetro aumentam o mesmo número de vezes, enquanto a área não aumenta o mesmo número de vezes.

Relações	A e B	A e C	A e D	A e E	A e F	A e G	A e H
Altura das patas	2	3	4	5	6	7	8
Comprimento do pescoço	2	3	4	5	6	7	8
Perímetro	2	3	4	5	6	7	8
Área	4	9	16	25	36	49	64

Tabela 16 - Exemplo da tabela realizada no quadro

Com base nesta discussão podemos concluir que a maior parte dos alunos da turma compreendeu que existem situações em que as variaveis covariam entre si e ao mesmo tempo a relação entre elas mantem-se constante (invariância). Por outro lado também existem situação em que isso não se verifica.

Com base na análise das respostas dos alunos durante esta sessão permitiu-nos definir alguns aspetos da seguinte categoria:

Procedimentos

Nesta parte da tarefa podemos verificar uma evolução, principalmente na forma de apresentar as justificações, pois é evidente:

- O uso de tabelas para explicar o raciocínio utilizado, este procedimento é importante referir, porque desde a segunda sessão que a investigadora tem solicitado o uso de tabelas para os alunos explicarem como raciocinaram, e nesta fase final os alunos utilizam as tabelas autonomamente sem a intervenção da investigadora.

- A identificação das regularidades numéricas do perímetro da circunferência grande e da área da mesma circunferência para verificarem que o perímetro e a área não aumentam o mesmo número de vezes.

5.5. Tarefa 2

Esta sessão foi desenvolvida num bloco de 90 minutos numa aula de Português, tendo como objetivo produzir vários tipos de texto para que os alunos se apropriassem das características de cada texto. No momento desta sessão a professora desta unidade curricular tinha acabado de lecionar os diferentes tipos de textos e as suas características, assim sendo, esta sessão serviu para que os alunos se apropriassem dessas características. Além disso, treinaram a escrita, uma vez que os alunos tinham tido poucas atividades deste género. Esta tarefa foi realizada individualmente e cada um escolheu o tipo de texto que mais lhe agradasse, desta forma obteve-se textos informativos, narrativos, banda desenhada, dramáticos e poéticos.

Para a realização dos textos informativos os alunos fizeram uma pesquisa na internet e no manual de Ciências Naturais, sobre a vida de um pato, ou seja, classificaram-no cientificamente (reino, filo, classe, ordem e família), pesquisaram a sua alimentação, o seu revestimento e a forma como se desloca. Os alunos mostraram-se bastante motivados e empenharam-se e esse empenho é notório tanto na criatividade que manifestaram durante a elaboração dos seus textos como nas ilustrações que fizeram. No final, obteve-se os vários tipos de textos que tinham sido abordados nas aulas. Por essa razão achou-se interessante construir um livro. Para isso, foi selecionado um título para o livro que iria estar exposto à comunidade do colégio, o titulo escolhido foi “histórias mágicas”.

Figura 33 - Painel exposto no Colégio D. José I

5.6. Questionário

O questionário foi o instrumento de análise de dados utilizado para saber a opinião dos alunos sobre a tarefa “O Ovo Mágico”, o que mais gostaram da tarefa, o que menos gostaram e o que aprenderam com a atividade que a tarefa lhes proporcionou. As questões são de natureza aberta, uma vez que o objetivo deste questionário era saber a opinião dos alunos sobre o trabalho desenvolvido, além disso também se pretende que as respostas sejam diversificadas e verdadeiras, de acordo com o que pensam e sentem.

De acordo com a opinião dos alunos, esta tarefa pode-se subdividir em três categorias de tarefa: tarefas de carater lúdico, tarefas que envolvem raciocínio proporcional e tarefas de visualização. De facto houve uma forte tendência para as atividades lúdicas, tais como, pintura e recorte.

1) Das tarefas lúdicas, nomeadamente pintar.

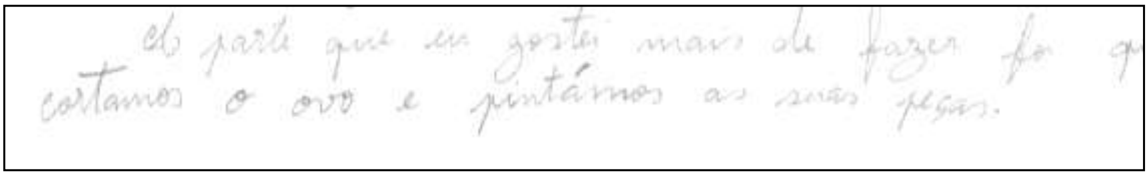

A parte que eu gostei mais de fazer foi q
cortamos o ovo e pintámos as suas peças.

Figura 34 - Opinião da Aluna A25

2) Das tarefas que envolvem raciocínio proporcional:

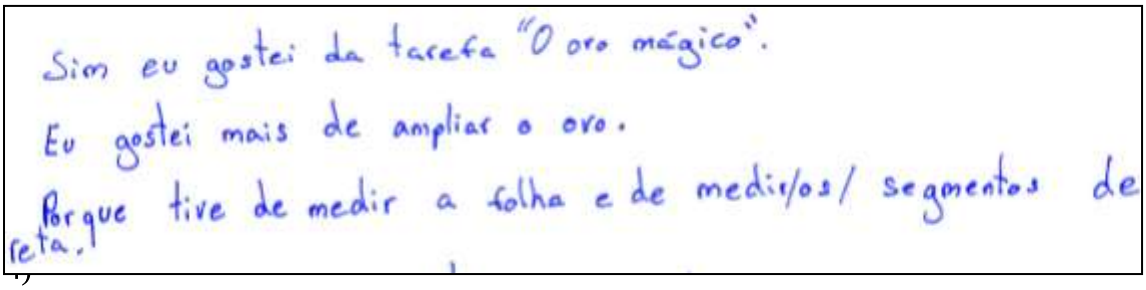
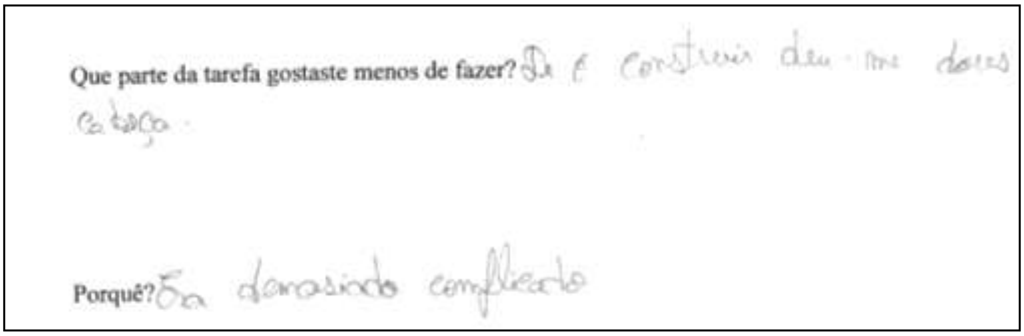

Sim eu gostei da tarefa "O ovo mágico".
Eu gostei mais de ampliar o ovo.
Porque tive de medir a folha e de medir/os/ segmentos de
reta.

Figura 35 - Opinião da aluna A8

3) Tarefas de visualização, nomeadamente a construção do puzzle.


Que parte da tarefa gostaste menos de fazer? Da é construir deu-me dores
cabeça.

Porquê? Era demasiado complicado

Figura 36 - Opinião do aluno A1

No gráfico 3 constam as frequências absolutas do tipo de tarefas preferidas pelos alunos do 5.º B durante estas 4 sessões.

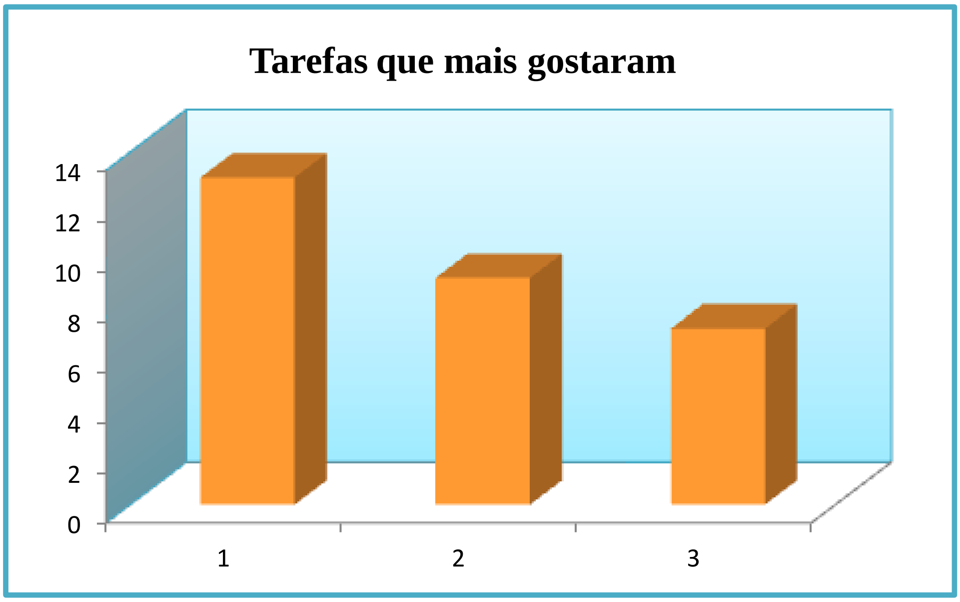


Gráfico 3 - Classificação das tarefas que mais gostaram

Se por um lado a construção do puzzle foi para alguns muito divertida, para outros foi muito complicada. Por esta razão é que os grupos não conseguiram construir o puzzle, provando mais uma vez que a visualização não é um tema que esteja a ser muito trabalhado no ensino básico.

A questão *O que aprendeste com esta tarefa?* também obteve respostas interessantes que merecem ser partilhadas:

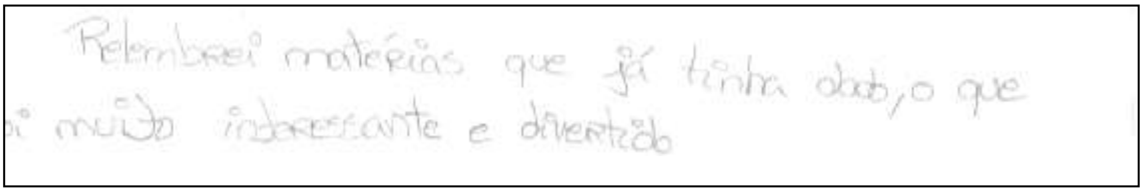

Relembrei matérias que já tinha dado, o que
i muito interessante e divertido

Figura 37 - Opinião da aluna A5


Aprendi a multiplicar as medidas do ovo de
maneiras diferentes.

Figura 38 - Opinião da aluna A24

III - Conclusões

Capítulo 6

Conclusão

Neste capítulo será apresentada uma síntese de estudo, assim como as principais conclusões, dando respostas às questões de investigação. Na parte final, além da reflexão final apresentam-se algumas considerações relativamente a este estudo

6.1. Síntese do estudo

A presente EE pretendia analisar o raciocínio proporcional dos alunos através de tarefas de natureza exploratória, envolvendo materiais manipuláveis, como o tangram (ovo mágico), antes da formalização conceptual do tema proporcionalidade direta. Este estudo foi realizado no 2.º CEB e para isso procedeu-se à planificação e implementação das tarefas.

Considerando a importância dos materiais manipuláveis, recomendáveis na aprendizagem de diversos conceitos, pois proporcionam aulas mais interessantes e motivadoras, além disso capta a atenção dos alunos mais distraídos, desinteressados e com dificuldades de aprendizagem, despertando-os para os conteúdos que se pretendem lecionar, foi realizada uma tarefa dividida em quatro partes de carater lúdico e exploratório, com o objetivo de recordar conceitos já aprendidos e desenvolver destreza nos procedimentos e capacidades cognitivas sobre proporcionalidade direta, proporcionando uma melhor compreensão deste conceito. A tarefa foi realizada em várias sessões e no final de cada sessão foi reservado um momento de discussão com a turma em geral. Esta tinha como objetivo fazer um balanço do trabalho realizado na sessão, criar momentos de interação, incentivando os alunos a partilhar as suas estratégias confrontando-as com as dos outros colegas, para que sejam os alunos a chegar a conclusões e criar o seu próprio conhecimento, sempre com o apoio e orientação da investigadora.

A natureza empírica deste estudo assume uma metodologia qualitativa. Os participantes são uma turma do 5.º ano do Colégio D. José I. Este estudo permitiu descrever as estratégias utilizadas pelos alunos e compreender o significado das relações envolvidas no conceito de proporcionalidade direta, tendo por base a fundamentação teórica deste trabalho. Além disso permitiu que os alunos trabalhassem o raciocínio proporcional nos números e operações, nomeadamente com os números racionais e na geometria, na ampliação de figuras. Os instrumentos utilizados para a recolha de dados foram notas de campo, produções orais e escritas dos alunos e um questionário final. O papel destes instrumentos nesta investigação foi fundamental, pois contribuiu para dar resposta às questões de investigação.

6.2. Principais conclusões

As conclusões obtidas resultam do trabalho realizado durante as sessões e dos instrumentos de análise utilizados, com a finalidade de apoiar a recolha e análise de dados e tirar conclusões para dar respostas às questões de investigação deste estudo.

Questão de investigação 1

Que procedimentos utilizam os alunos no início do 2.º CEB na resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional?

Da análise realizada às produções orais e escritas dos alunos pode-se concluir que antes do ensino formal da proporcionalidade direta, os alunos têm tendência a utilizar estratégias aditivas e multiplicativas, evidenciando regularidades. Esta conclusão vai ao encontro das conclusões de muitos autores que também investigaram o raciocínio proporcional antes da conceptualização da proporcionalidade direta. Segundo Costa e Ponte (2008), os alunos recorrem muitas vezes a estratégias intuitivas, de carater informal, geralmente essas estratégias são aditivas. De facto, neste estudo verifica-se algumas dessas estratégias, indo de encontro à literatura consultada e que refere que é com estas que os alunos começam a dar os primeiros passos na compreensão deste tipo de raciocínio. O número de estratégias aditivas foi muito reduzido devido ao facto de a turma estar divida em grupos, porque se a tarefa fosse realizada individualmente possivelmente iriam aparecer mais alunos com esse procedimento. No entanto, estes casos foram tomados em conta, nas discussões finais. Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), "Compreender estes métodos espontâneos e tomá-los como ponto de partida para promover a reflexão dos alunos em confronto com novas situações pode ser uma estratégia adequada para que desenvolvam um raciocínio correto.” (p. 50).

Questão de investigação 2

Em que fase do raciocínio proporcional os alunos se encontram antes do ensino formal da proporcionalidade direta?

Na revisão da literatura concluiu-se que o raciocínio proporcional se vai construindo lentamente, segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), “com níveis de funcionamento cognitivo progressivo e muito interligada com a partição e a equivalência.” (p. 50). Com base nos escritos de Lesh, Post, e Berh, uma das características do raciocínio proporcional é o aumento gradual da competência local, ou seja, depende do desenvolvimento cognitivo de cada aluno.

Segundo os níveis propostos por Langrall e Swafford (2000), citado por Costa (2007, p. 12), podemos concluir que alguns alunos estão no nível 0, sem raciocínio proporcional, porque não reconheceram a relação multiplicativa, fazendo comparações aditivas. Outros alunos já apresentaram um raciocínio informal (nível 1) sobre situações proporcionais, utilizando estimativas para fazer comparações qualitativas e encontrar a razão de semelhança e muito poucos alunos se encontravam no nível 2, porque embora a maioria dos alunos conseguissem encontrar a razão de semelhança, poucos foram os que a souberam aplicar na ampliação do ovo, no entanto, na parte final da implementação da tarefa, verificou-se que alguns alunos tiveram a iniciativa de usar tabelas para organizar o pensamento, condição necessária para este nível de desenvolvimento.

Costa (2007) refere que uma grande parte dos alunos manifesta capacidades de resolver de forma correta tarefas que envolvem o raciocínio proporcional, antes do ensino formal da proporcionalidade. Todavia, nesta investigação, que envolvia o raciocínio proporcional na área da geometria, a maior parte dos alunos, apesar de reconhecerem intuitivamente a razão de semelhança, não conseguiram aplicar o raciocínio proporcional, ou seja, não conseguiram ampliar o ovo. Demonstrando haver pouco trabalho realizado nesta área no que respeita ao raciocínio proporcional.

Questão de investigação 3

Que dificuldades apresentam os alunos quando confrontados com situações que envolvem o raciocínio proporcional?

As dificuldades apresentadas pelos alunos parecem que se devem essencialmente à não compreensão das estruturas multiplicativas envolvidas em situações que envolvem raciocínio multiplicativo, pois houve alunos que associaram a ampliação de figuras à adição demonstrando não compreender a estrutura multiplicativa que estava implícita no problema. Estas dificuldades vão ao encontro das dificuldades detetadas por alguns autores mencionados na revisão da literatura, pois segundo Lamon (2005) citada por Costa e Ponte (2008), uma das dificuldades que os alunos podem ter é não reconhecer a natureza multiplicativa das situações proporcionais, uma vez que estes têm dificuldades em compreender a diferença entre adicionar e multiplicar e também as situações em que estas operações se aplicam. O facto de os alunos compreenderem a estrutura multiplicativa, não implica que tenham o raciocínio proporcional desenvolvido, pois também se verificou que houve muitos alunos que conseguiram encontrar a razão de semelhança mas não conseguiram aplicá-la, ou seja utilizá-la na ampliação de figuras, demonstrando dificuldade em compreender que quando um segmento aumenta os outros aumentam na mesma proporção. Também o contexto da tarefa não ajudou os alunos, pois estes demonstraram dificuldades nos conceitos geométricos e pouca destreza na manipulação dos respetivos materiais.

Outra dificuldade verificada foi o facto de os alunos numa relação de segunda ordem, não reconhecerem uma relação multiplicativa entre os termos de uma razão e aplica-la aos outros dois termos (covariação). No entanto, não tiveram dificuldade em reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos correspondentes de duas razões e alargá-la aos outros termos correspondentes. Efetivamente, quando na escola uma relação de segunda ordem é abordada, por exemplo a equivalência de frações, só se fala das relações multiplicativas entre os termos correspondentes de duas razões e era benéfico para os alunos, que quando o ensino da equivalência de frações fosse lecionado se abordasse ambas as estratégias.

6.3. Considerações finais

Ao elaborar uma pesquisa sobre o raciocínio proporcional, foi constatado que o ensino e a aprendizagem da proporcionalidade é feito de forma mecanizada, através de fórmulas, o que não significa que os alunos tenham compreendido o conceito, muito pelo contrário, a maior parte dos alunos têm revelado falta de compreensão. Dessa forma, é necessário que se realizem tarefas em que os alunos utilizem estratégias próprias para a resolução deste tipo de problemas. Por essa razão, este tema foi trabalhado de forma diferente, propondo aos alunos um trabalho lúdico e estimulante, por se tratar de um jogo, tangram, que por norma são tarefas bastante apelativas. Além disso era novidade para os alunos, eles ainda não conheciam, nem estavam habituados a envolver uma diversidade de conceitos numa só tarefa, prova disso foi o facto de uma aluna, quando lhe foi perguntado o que aprendeu com esta tarefa ter respondido que tinha relembrado outros conceitos, e que foi muito divertido, outra aluna respondeu que trabalhou a geometria, outros responderam que gostaram de aprender a ampliar. Estas respostas provam que efetivamente os alunos não estão habituados a trabalhar o raciocínio proporcional em tarefas que envolvem conceitos geométricos, o que seria enriquecedor para eles. Outro aspeto positivo foi a articulação curricular que este trabalho teve com a disciplina de ET, EV, Português e Ciências Naturais. Na disciplina de Português foram realizados diversos tipos de textos (apêndice 6), onde os alunos tiveram que fazer pesquisa na área de Ciências Naturais, fazendo a interdisciplinaridade também com esta área curricular. Esta atividade também foi bastante motivadora e estimulante para os alunos, não só pelo interesse demonstrado, mas pelo prazer de verem os seus trabalhos expostos à comunidade do Colégio D. José I.

Segundo Olivo e Godino (2010), a tarefa do ensino da proporcionalidade, cuja responsabilidade é dos professores, não parece ter atingido, ainda, os níveis pretendidos para garantir a aprendizagem. Dessa forma, este estudo revela que deve haver um maior envolvimento do professor na gestão curricular, de forma a selecionar e estruturar tarefas diversificadas e enriquecedoras, recorrendo a materiais manipuláveis apelativos que permitam um maior envolvimento dos alunos. Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) o raciocínio proporcional está interligado com outros conceitos que mais tarde os alunos vão ter que os dominar, como frações, semelhança de figuras e razões trigonométricas. Outros autores também consideram que o raciocínio proporcional está presente em problemas que envolvem comparações, razões, conversões e combinações.

A adequação didática das tarefas implementadas tem em consideração várias dimensões já referidas no enquadramento teórico: adequação epistémica, adequação cognitiva, adequação interacional, adequação mediacional e adequação ecológica.

Adequação epistémica

As situações problema que foram propostas aos alunos permitiam o desenvolvimento do raciocínio proporcional e estavam de acordo com o PMEB. Embora o ensino formal da proporcionalidade direta e semelhança de figuras esteja previsto para o 6.º ano, de acordo com o programa o desenvolvimento do raciocínio proporcional começa no 3.º ano de escolaridade. Estas situações tinham como objetivo ampliar o ovo mágico e construírem uma figura com as partes que constituíam o ovo. Além disso também se propôs aos alunos que estabelecessem relações proporcionais entre duas partes da figura o CP e a AP. A linguagem utilizada pelos alunos foi gráfica, esta foi demonstrada na construção do ovo, no recurso ao desenho para encontrarem a razão de semelhança, embora de forma intuitiva, e também na utilização de tabelas. Os alunos também utilizaram termos e expressões geométricas que já tinham sido lecionados, e outros, como a mediatriz foram falados pela primeira vez. Outro tipo de linguagem é a algébrica, por exemplo para encontrarem a área e o perímetro da circunferência, os alunos recorreram às fórmulas correspondentes, que também já tinham sido lecionadas. Os procedimentos, definições e proposições justificaram os argumentos que se verificaram nas atividades em que os alunos se envolveram.

Adequação cognitiva

O desenvolvimento da atividade do puzzle “O Ovo Mágico” proporcionou aos alunos capacidades cognitivas sobre alguns conceitos que posteriormente serão lecionados, como o conceito de proporcionalidade direta, semelhança de figuras, razão, proporção e ampliação. Considera-se que apesar dos alunos não terem o raciocínio proporcional muito desenvolvido, pelo menos na área da geometria, mais concretamente na ampliação de figuras, verificou-se que conseguiram estabelecer relações multiplicativas entre as variáveis em questão, o que segundo a revisão da literatura é fundamental para o desenvolvimento deste tipo de raciocínio. Os argumentos utilizados pelos alunos são de natureza empírica, no momento da realização e compreensão da tarefa.

Adequação interacional

Houve uma grande participação e motivação por parte dos alunos. No final de cada sessão houve a preocupação de se estabelecer um diálogo para falar com os alunos sobre a atividade em que participaram, esta interação foi importante, pois permitiu detetar algumas dificuldades. A interação com os alunos é fundamental no processo de aprendizagem, pois o aluno ao defender as suas ideias sente necessidade de tornar claro e organizado o seu raciocínio para que sejam compreendidas, e assim aprofunda e aperfeiçoa o seu pensamento. Esta necessidade vai contribuir para melhorarem a compreensão conceptual e desenvolverem a capacidade de argumentação e justificação. Para além disso, também ouve as ideias dos seus colegas e participa na discussão, com o objetivo de esclarecer, questionar e alargar conjeturas. Ponte (2005), considera fundamental a realização de tarefas exploratórias, mas também refere que os momentos discussão são igualmente privilegiados, pois "constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (p. 16), através da demonstração dos seus trabalhos, onde apresentam as suas justificações permitindo ao professor clarificar os conceitos e procedimentos.

Adequação afetiva

O objetivo da escolha deste tangram foi motivar e despertar interesse nos alunos para que eles se envolvessem na atividade. Para isso, as primeiras sessões foram realizadas numa aula de ET, pois alguns objetivos dessa unidade curricular encaixavam nos objetivos da tarefa. Além disso o ovo dava origem a um figura que era um animal e permitiu aos alunos fazerem pesquisas sobre esse animal para posteriormente elaborarem textos relacionados com o mesmo. Houve momentos em que os alunos demonstraram bastante empenho pois faziam questões, e todos queriam mostrar os seus trabalhos.

Adequação mediacional

Quanto à disponibilidade dos recursos materiais para o desenvolvimento da atividade, os alunos tiveram à sua disposição todo o tipo de material geométrico para a realização da tarefa e fichas de trabalho onde constavam as questões propostas pela investigadora. O facto de a tarefa ser um tangram proporcionou aos alunos trabalharem com materiais manipuláveis (as peças do ovo e mais tarde as figuras) e assim desenvolverem a visualização de figuras no plano. Este recurso permitiu a exploração de conteúdos, pelos alunos, através de tarefas de natureza exploratória, nas quais os alunos utilizaram os seus conhecimentos prévios. O uso das tabelas revelou-se muito adequado, pois permitiu a ligação permanente entre a representação gráfica e os conceitos envolvidos. Quanto ao tempo, no geral foi cumprido, contudo a gestão do tempo foi complicada, uma vez que os alunos demoravam muito tempo na realização das tarefas, restando pouco tempo para a demonstração e discussão dos resultados.

Adequação ecológica

Esta dimensão foi tida em consideração, pois esta tarefa está relacionada com o tópico relações e regularidades que está inserido no tema Álgebra, do 2.º CEB. Como se verificou na planificação da tarefa, e até mesmo na análise de dados, houve a preocupação de se fazer articulação curricular, ou seja várias conexões interdisciplinares, nomeadamente com a disciplina de ET, porque como já foi referido os objetivos previstos para esta unidade curricular adequam-se aos previstos para esta tarefa e além disso os materiais utilizados também estavam relacionados com esta disciplina, designadamente, o material geométrico. Outra conexão interdisciplinar foi com Português na elaboração de vários tipos de textos, nomeadamente textos informativos que permitiu várias pesquisas sobre a vida desse animal, fazendo assim a transversalidade com a unidade curricular das Ciências Naturais.

No que concerne ao desempenho dos alunos nas tarefas, é de referir que os alunos ao longo desta investigação mostraram uma evolução significativa. Enquanto no princípio, mostravam uma grande dependência da investigadora, no final notou-se que estavam mais independentes. No início os alunos não escreviam era preciso a investigadora dizer para escrever o que estavam a dizer, pois notava-se que não estavam bem certos do que estavam a dizer, embora alguns raciocínios estivessem corretos, no final esta situação não se verificou, os alunos foram mais criativos nas respostas dadas. Esta evolução verificou-se na sessão nº 3 em que os alunos tinham que analisar as frações que relacionavam o CP de duas figuras e a AP dessas mesmas figuras, pois os alunos podiam simplesmente dizer que eram equivalentes, mas muitos alunos justificaram essa equivalência estabelecendo relações multiplicativas entre os numeradores e denominadores das duas frações. Essa evolução também se verificou na sessão n.º 4, aquando do reconhecimento da falta de proporcionalidade direta entre o perímetro e a área, muitos alunos reconheceram regularidades, outros fizeram tabelas para justificar as respostas. Refere-se que no início os alunos não faziam tabelas, estas foram propostas pela investigadora na discussão das primeiras sessões. O facto de existirem discussões no final de cada sessão também contribuiu para essa evolução, além disso, desenvolveram capacidades de comunicação e argumentação matemática. A evolução do desempenho dos alunos também foi evidenciada, na aula de Português, na elaboração dos textos e na escolha de um título para o livro "Histórias Mágicas" que fez parte da exposição realizada no colégio nos últimos dias de aula, para que fosse consultado pela comunidade escolar do Colégio.

6.4. Reflexão final

Penso que a metodologia de investigação utilizada foi adequada para esta recolha de dados, pois permitiu descrever a atividade que os alunos desenvolveram durante a implementação deste trabalho e como se processa o raciocínio proporcional antes da conceptualização da proporcionalidade direta. Na minha opinião, a análise da adequação didática foi crucial para refletir sobre todo este trabalho, de facto, é uma ferramenta fundamental para promover a reflexão do professor sobre a sua prática.

Considero que este trabalho revelou-se muito profícuo, para mim e, no meu ponto de vista, para os alunos. Para mim, porque permitiu uma maior investigação sobre o assunto, uma vez que sentia algumas dificuldades em abordar este tema e ao mesmo tempo curiosidade de saber como é que os alunos pensavam proporcionalmente antes do ensino formal deste conceito, sem "fórmulas" que lhes permitisse resolver este tipo de problemas. Para os alunos, porque lhes deu liberdade de pensamento, de se exporem intuitivamente, revelando também as suas dificuldades que com a ajuda do professor e dos colegas foram-se dissipando.

O tema deste trabalho agradou-me, pois, como já foi referido no enquadramento teórico, o tema não é fácil para os professores, vários autores já o comprovaram, e muito menos para os alunos. Todavia o carater lúdico das tarefas criou um ambiente bastante agradável, os alunos, durante as atividades mostraram-se bastante motivados e interessados, pois as respostas do questionário final foram bastante positivas. A planificação das tarefas teve de ser muito bem pensada, uma vez que disponha de pouco tempo, pois estava inserida num grupo de estágio de três elementos. Como não havia possibilidade de implementar todas as sessões na aula de matemática, pois iria afetar o cumprimento da planificação anual, aproveitei a disponibilidade do professor de ET e parte da tarefa foi realizada nessa disciplina. Assim sendo, a planificação dessas sessões tinham como objetivo fazer a transversalidade com ET. Também achei interessante trabalhar a ampliação das figuras com outro tópico da matemática "frações equivalentes", o que foi bastante pertinente, uma vez que este não foi trabalhado isolado dos outros tópicos da matemática, mas sim conectado com a ampliação de figuras, desenvolvendo, dessa forma o raciocínio proporcional. Contudo, para esta aula de matemática também estava planeado o conceito de "frações próprias e frações impróprias" então a planificação desta sessão tinha que ser preparada de forma a fazer a ligação com esse conceito.

As principais dificuldades na implementação desta EE foram essencialmente com a gestão do tempo, pois os alunos demoravam mais tempo que o previsto na realização das tarefas, restando menos tempo para a discussão final da atividade desenvolvida. Estes momentos de partilha e de reflexão foram bastante pertinentes, pois contribuíram para o bom desenvolvimento de capacidades cognitivas sobre conceitos que ainda não foram lecionados, nomeadamente o conceito de razão de semelhança, proporção e proporcionalidade. Efetivamente, o raciocínio proporcional deve ser trabalhado no 1.º CEB, não só na aritmética mas também noutros temas da matemática, neste caso na geometria, para que os alunos consigam compreender o significado matemático do conceito de proporcionalidade (estrutura, invariância, e equivalência ou não equivalência sob uma variedade de transformações), o que permitirá, posteriormente, uma melhor compreensão dos mesmos. Por outro lado o registo das notas de campo não foi fácil, apesar do grupo de estágio ser composto por três elementos e também termos o apoio do professor da turma, não foi possível estar só a recolher informações para este trabalho, pois estávamos todos em ação, e além disso o papel do professor sobreponha-se ao de investigadora. Contudo as justificações pedidas nas fichas de trabalho e a discussão dos resultados no final das sessões colmataram essas limitações.

No que concerne à análise de dados, primeiro analisei as respostas corretas e incorretas dos alunos dando alguns exemplos dessas respostas e depois separei-as por categorias, de acordo com as questões de investigação (dificuldades apresentadas, procedimentos utilizados e fases do raciocínio proporcional em se encontram os alunos). Este método, na minha opinião, foi bastante produtivo, pois facilitou as respostas a essas questões no capítulo das conclusões.

Em termos profissionais, esta EE fez-me refletir sobre a seguinte questão: Será necessário os alunos "decorarem" a propriedade fundamental das proporções (regra dos três simples) para resolverem problemas que envolvem proporcionalidade direta? Quando realizei a PPSB 1 lecionei uma aula que tinha como objetivo a descoberta de regularidades numéricas, em seguida a minha colega de estágio deu uma aula que tinha como objetivo resolver problemas que envolvessem o raciocínio proporcional. A professora cooperante referiu que os alunos têm dificuldade em resolver este tipo de problemas, por isso têm que ser trabalhados. Ora nessa altura lembrei-me que na unidade curricular "Didática da Matemática" do 1.º ano do Mestrado em Ensino 1.º e 2.º CEB, uma das formas de avaliação era desenvolver e resolver uma questão problema que estava relacionada com a proporcionalidade direta. O problema em si não tinha muita dificuldade, aplicava-se a regra de três simples e estava resolvido, a dificuldade estava em como explicar aos alunos, embora o trabalho fosse realizado não me convenceu e achei que devia aprofundar mais este tema. Este facto aliado ao facto de os alunos sentirem dificuldades em resolver problemas que envolvem o raciocínio proporcional fez-me refletir: Como é que os alunos poderão compreender um conceito se eu como professora não o domino? Então achei que seria um bom tema para investigar e aprofundar. Quando aprendi este tema pela primeira vez, nos anos 80, estava em vigor um ensino que privilegiava a memorização de regras, sem dar muita importância à sua compreensão, por isso o que eu aprendi sobre este tema foi aplicar a regra de três simples. Após uma longa pesquisa bibliográfica cheguei à conclusão que de facto não é preciso aprender uma regra para resolver estes problemas, mas sim compreender o que está por detrás dessa regra, ou seja, compreender o significado matemático do conceito de proporcionalidade, o que permitirá, posteriormente, uma melhor compreensão do mesmo. Neste momento estou em pleno acordo com os autores que referem que a utilização da regra dos três simples devia ser adiada, pois embora ajude na resolução dos problemas limita o raciocínio dos alunos.

Assim, posso afirmar que a realização deste relatório, desde a fase da revisão da literatura até à fase de análise de dados contribuiu para que fosse uma experiência enriquecedora, quer a nível profissional quer a nível pessoal. Outro aspeto muito interessante foi o facto de poder trabalhar o raciocínio proporcional em contexto geométrico e numérico, pois como foi referido no enquadramento teórico Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), referem que se deve dar oportunidade aos alunos de trabalhar com situações que envolvam o raciocínio proporcional, as quais devem ser de natureza geométrica e numérica.

Referências Bibliográficas

- ✓ Abrantes, P.; Serrazina, L. e Oliveira, O. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa. Ministério da educação. Disponível em: http://departamentos.esramada.pt/mat/3ciclo/matematica_na_educacao_basica.pdf

- ✓ Alarcão, I. (1996). *Formação Reflexiva de Professores – Estratégias de Supervisão*. Porto: Porto Editora.

- ✓ Bell, Judith (1997). *Como realizar um projeto de investigação: um guia para a pesquisa em ciências sociais e da educação*. Lisboa: Gradiva.

- ✓ Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e Métodos*. Porto: Porto Editora.

- ✓ Boyer, C. B. (1998). *História da Matemática.* São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blucher.

- ✓ Breda, A.; Serrazina, L.; Meneses, L.; Sousa, H. e Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

- ✓ Cabrita, I (1998). *Resolução de Problemas: aquisição do modelo de proporcionalidade direta apoiada num documento hipermédia*. Aveiro: Universidade de Aveiro. Tese de doutoramento.

- ✓ Cohen, L. e Manion, L. (1994). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

- ✓ Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade de Lisboa. Dissertação de Mestrado em Educação.

- Costa, S., Ponte, J. P. (2008). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo.* Revista da Educação, Vol. XVI, nº2. 65-100.

- Coutinho, C. (2005). *Percursos da Investigação em Tecnologia Educativa em Portugal - Uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas (1985-2000).* Braga: IEP – Universidade do Minho.

- Coutinho, C. (2008). *Métodos de investigação em Educação*. Universidade do Minho. Disponível em: http://faadsaze.com.sapo.pt/7_caracteristicas.htm.

- Coutinho, *et al* (2009). *Investigação – Ação: metodologia preferencial nas práticas educativas.* Revista Psicologia, Educação e Cultura, 13:2. p. 355-379.

- Eves, H. (1992). *An Introduction to the History of Mathematics*. Saunders Series.

- Godino, J. D. (2002).*Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches em Didactiques des Mathematiques. Grenoble. França, v. 22, n. 2/3, p.237-284. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/dimension_metadidactica_11nov07.pdf.

- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didática de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME. Recife. Brasil. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

- Godino J. D. (2013). *Enfoque ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Un marco teórico integrativo para la didáctica de la matemática.* Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis%20EOS%2011enero_2013.pdf.

- Godino, J. D., Batanero, C. e Font, V. (2008). *Enfoque ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Un marco teórico integrativo para la didáctica de la matemática.* Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/poster_EOS_19diciembre08.pdf.

- Godino, J. D., Batanero, C. e Font, V. (2008). *Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática.* ACT SCIENTLAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10(2). Retrieved from. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_portugues.pdf

- Godino, J. D., Batanero, C. e Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instruiccón matemática.*Universidad de Granada. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf.

- Godino, J. D., Font, V. (2007). *Algunos Desarrollos de la Teoríade los Significados.* Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf.

- Hébert, M. L. (1996). *Pesquisa em Educação*. Instituto Piaget. Lisboa.

- Hébert, M. L., Goyette, G. e Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

- Korth, J. (2010). *Math in the Middle Institute Partnership – Action Research Project Report.* Lincoln: University of Nebraska.

- Lesh, R., Post, T. e Behr, M. (1988). *Proportional reasoning.* Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/Lesh-Post-Behr- Raciocinio%20Proporcional_PT_.pdf

- Martins, I (2010). *O raciocínio matemático em atividades de investigação numa turma do 5.º ano do ensino básico.* Faro. Universidade do Algarve.

- Ministério da Educação – BEB (2001). *Curriculum Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação.

- Ministério da educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

- NCTM, (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

- Nobre, S. (2004). *Leitura crítica da história: Reflexões sobre a história da Matemática.* Ciência e Educação, v. 1, nº 3, p. 531-543.

- Olivo M., Godino, J. D. (2010). *Desarrollo del conocimiento del professor mediante el estúdio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidade*. Educere – Investigacion arbitrada nº 48 189-205. Disponível em:
http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35616720018.

- Pereira, J. e Ponte, J. P. (2008). *Raciocínio Matemático em contexto Algébrico – Uma análise com Alunos de 9.º Ano.* Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Disponível em: http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334310.PDF

- Ponte, J. P. (2003). *Investigar, ensinar e aprender*. APM. Disponível em:
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf.

- Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. Em GTI (Ed.). O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM. Disponível em:
http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3008

- Ponte, J. P.; Branco, N. e Matos A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

- Ponte, J. P.; Serrazina, M. L. (2000). *Didática da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

- Ponte, J. P.; Silvestre A.I.; Garcia, C. e Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades.* Lisboa: Universidade de Lisboa e Universidade da Beira Interior.

- Silvestre A. (2006). *Investigações e Novas Tecnologias no Ensino da Proporcionalidade Direta: Uma Experiência no 2.º Ciclo. Lisboa. Universidade de Lisboa*. Dissertação de Mestrado em Educação.

- Silvestre, A. e Ponte, J. P. (2012). *Proporcionalidade direta no 6º ano de escolaridade: Uma abordagem exploratória.* Lisboa: Universidade de Lisboa;

- Spinillo, A. G. (2002). *O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão sobre proporção*. Universidade de Pernambuco. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Spinillo(Alicia)02.pdf.

- Struik, D. J. (1987). *História concisa das matemáticas.* Gradiva. Lisboa.

Sites consultados em maio de 2013:

- http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/hora-ensinar-proporcao-fala-mestre-terezinha-nunes-428131.shtml.
- http://wiki.ua.sapo.pt/wiki/T%C3%A9cnicas_e_Instrumentos_de_Recolha_de_Dados_na_Investiga%C3%A7%C3%A3o_em_Educa%C3%A7%C3%A3o.
- http://www.ua.pt/de/PageDisc.aspx?id=6295

Apêndices

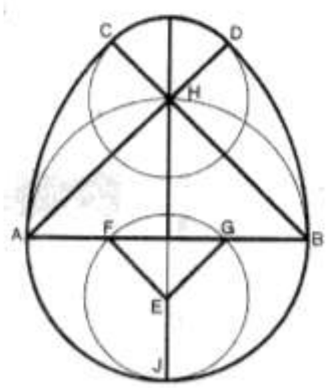
Apêndice 1 – I Parte da tarefa 1

<u>Tarefa 1 “O ovo mágico”</u>

<u>I Parte</u>

1. Lê com atenção este texto instrucional.

Como se faz o puzzle



1. Desenha um segmento de reta AB com 4 cm de comprimento e traça a sua mediatriz perpendicular ao segmento de reta e à mesma distância dos pontos A e B.

1. Com o compasso com centro a meio do segmento de reta traça uma circunferência com um raio de 2 cm. e marca o ponto H e J.

2. Desenha os segmentos de reta AH e BH e prolonga-os.

3. Desenha os arcos BD e AC (com centro em A desenha o arco BD, com centro em B desenha o arco AC).

4. Desenha uma circunferência centrada em H que toca, os grandes círculos em C e D. Mantém o compasso com a mesma abertura na mesma medida, para o passo seguinte.

5. Com o compasso com a mesma abertura do passo 5, com centro em J marca E.

6. Com a mesma abertura do passo 6 desenha uma circunferência centrada em E e marca os pontos F e G e une-os.

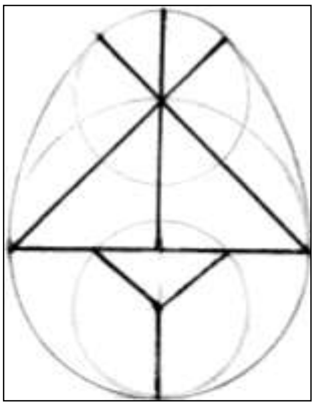
7. Desenha EF e EG. Corta as peças.

1.1.Com base nas instruções desenha o teu ovo.

Apêndice 2 – II Parte da tarefa 1

<u>Tarefa 1 "O ovo mágico"</u>

<u>II Parte</u>



2.1. Comparem o diâmetro da circunferência grande do ovo com a largura da cartolina. Justifiquem a vossa resposta.

1.3. Com base na comparação que fizeram, ampliem o ovo.

3. Recorta as peças do ovo maior e pinta-as. Só podes utilizar as 3 cores primárias: o vermelho, o amarelo, e o azul.

4. Com as peças do ovo, constrói uma figura igual à representada.

5. Demonstração e discussão dos resultados.

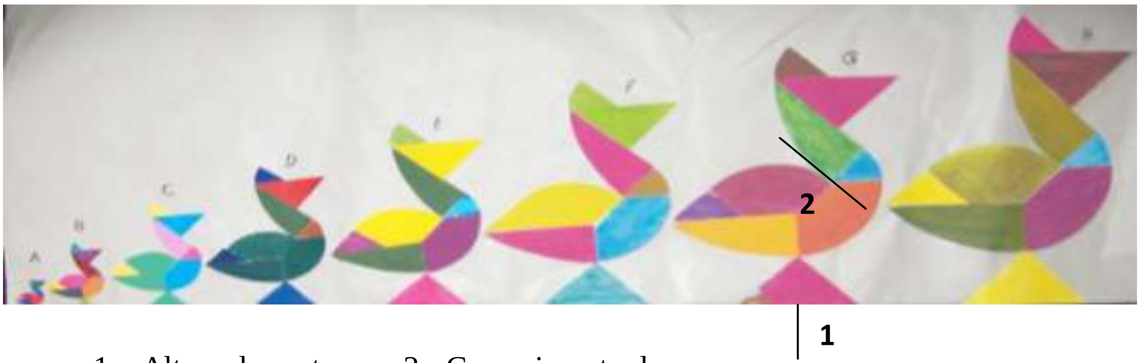
Apêndice 3 – III Parte da tarefa 1

<u>Tarefa 1 “O ovo mágico”</u>

<u>III Parte</u>

A partir da medida do raio de uma circunferência, cada aluno construiu um ovo. Esse ovo deu origem a um pato.

Do aumento da medida do raio, cada grupo obteve um pato de tamanho diferente.



1 – Altura das patas 2 - Comprimento do pescoço.

Utilizando um palito  como unidade de medida, podemos medir a altura das patas e o comprimento do pescoço do pato.

2. **Observa** a tabela:

Figuras	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Altura das patas	1	2	3	4	5	6	7	8
Comprimento do pescoço	2	4	6	8	10	12	14	16

2.1. **Escreve** o quociente entre a altura das patas de duas figuras à tua escolha.

2.2. **Escreve** o quociente entre o comprimento do pescoço das duas figuras que escolheste anteriormente.

2.3. **Compara** as frações que obtiveste e **regista** a tua conclusão.

Apêndice 4 – IV Parte da tarefa 1

Tarefa 1 "O ovo mágico"

Parte IV

Sabes as medidas do raio que deu origem a cada um dos patos, mas ainda não descobriste o que aconteceu à área e ao perímetro de cada uma das figuras. Agora vais descobrir!

Figuras	A	B	C	D	E	F	G	H
Raio da circunferência grande	2	4	6	8	10	12	14	16

1. **Indica** o perímetro da circunferência grande para cada uma das figuras.

2. **Indica** a área da circunferência grande para cada uma das figuras.

3. **Regista** a tua conclusão.

Apêndice 5 – Configuração epistémica da tarefa 1.

Configuração epistémica dos objetos e relações primárias da tarefa 1.

Problema: enunciado das fichas de trabalho

Motivam

Resolvem

Linguagens:

- Termos e expressões: segmentos de reta, mediatriz, circunferência, perpendicular, ampliação, razão, fração, proporção.

Gráfica: Tabelas, construção do ovo

- Cálculo algébrico: Divisões e multiplicações, cálculo da área $A = \pi r^2$ e do perímetro $P = 2 \times \pi \times r$

Expressam e regula

Regulam a utilização

REGRAS

Definições (conceitos):

Prévios: Definição de circunferência, segmento de reta, raio, triângulos, ângulos retos, ampliação, frações, frações equivalentes, perímetro e área.

Emergentes: mediatriz de um segmento de reta, razão de semelhança, proporcionalidade.

Procedimentos: Construção do ovo; medição do diâmetro da circunferência e da largura da cartolina e dividir as duas medidas, para encontrar a razão de semelhança; ampliar o ovo aplicando a razão encontrada, aplicando o raciocínio proporcional; Com recurso às figuras, estabelecer uma relação de equivalência entre a AP e o CP; reconhecer a equivalência através de relações proporcionais; reconhecer situações de proporcionalidade direta, concluindo que a área das figuras não aumenta o mesmo número de vezes que o perímetro, AP e CP

Proposições:

Prévias: O raio é metade do diâmetro; duas frações são equivalentes quando têm o mesmo quociente.

Emergentes: se aumentar o diâmetro, as peças que o compõem também aumentam na mesma proporção; na equivalência de frações existem relações de invariância e covariação; a área aumenta o quadrado do perímetro.

Justificam

Argumentos:

Justificação de natureza empírica

Apêndice 6 – Questionário.

Responde cuidadosamente a cada uma das questões:

Gostaste da tarefa "O ovo mágico"?

Que parte da tarefa gostaste mais de fazer?

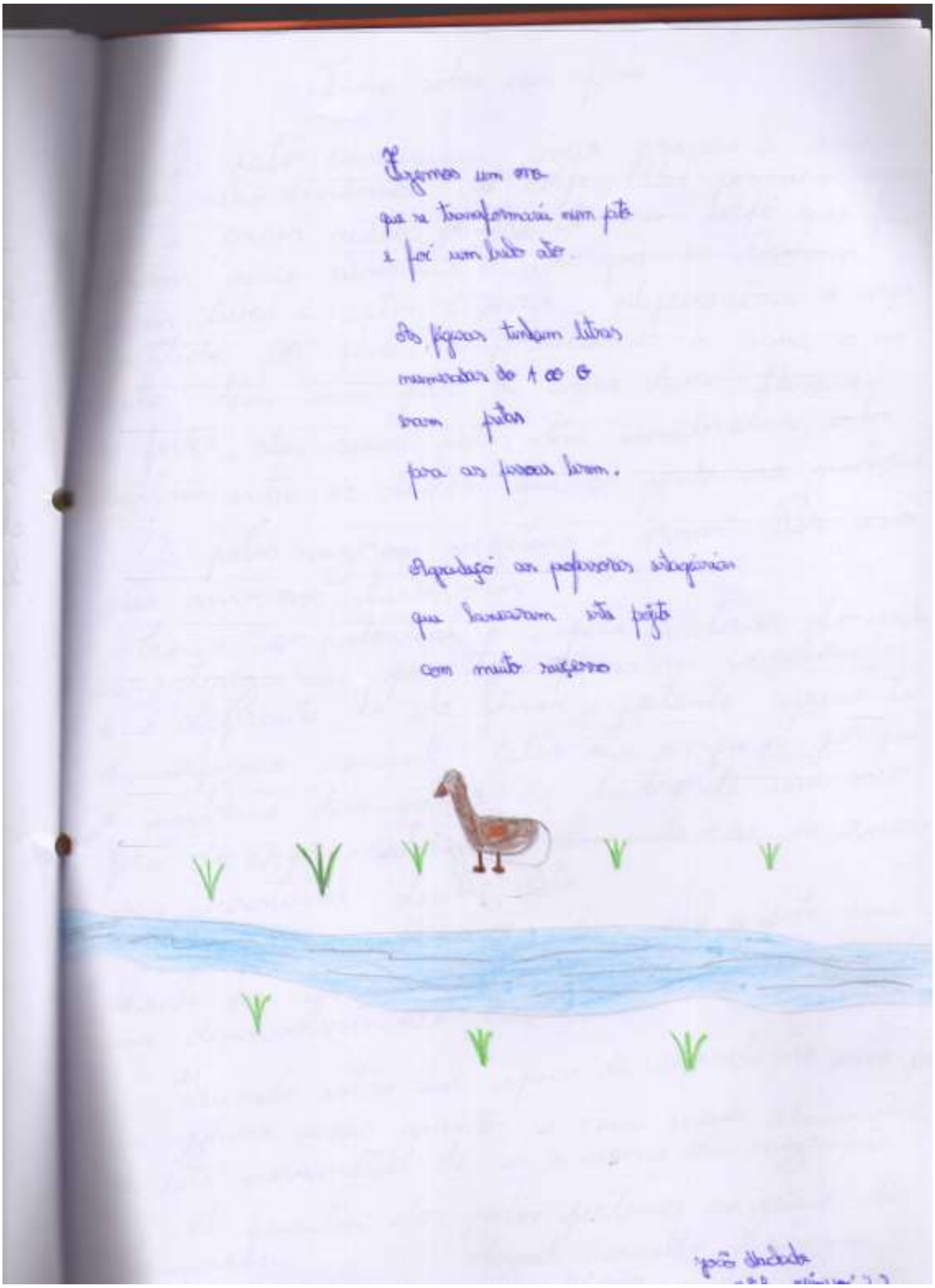
Porquê?

Que parte da tarefa gostaste menos de fazer?

Porquê?

O que aprendeste com esta tarefa.

Apêndice 7 – Alguns tipos de textos realizados pelos alunos.



Fizemos um ovo
que se transformaria num pato
e foi um belo ato.

As figuras tinham letras
marcadas de A a G
eram pistas
para as pessoas lerem.

Agradeço aos professores estagiários
que levaram este projeto
com muito sucesso

O pato com patas de farrapo

Era uma vez um pato
com patas de farrapo
que gostava de brincar
com o seu amigo gato

Tentavam brincar à apanhada
mas o pato caía
Tentava correr
mas nem isso conseguia

Tentaram resolver
o problema do pato
mas quando iam ao veterinário
ele caiu no mato

O gato teve a ideia
de levar o pato às costas
mas o gato tropeçou
e ficou com as patas tortas

Tiveram outra ideia
e fizeram assim
foram ter com a bruxa
que lançou pozinhos de perlim-pim-pim

A ideia resultou
e já puderam brincar
os dois com patas verdadeiras
ficaram lindos de pasmar.

Inês Santos 5ºB

Tudo sobre um pato

Os patos conseguem voar graças à sua forma aerodinâmica do corpo. Eles possuem ossos e sacos aéreos dentro do seu corpo que funcionam como reservas de ar que os tornam mais leves e aptos a voar. Apresentam o corpo revestido por penas impermeáveis à água e ao vento, têm um par de asas leves, flexíveis e fortes. As suas patas têm membranas interdigitais entre os dedos que os ajuda na natação.

Os patos ingerem vegetais e ervas. Por isso são animais herbívoros.

Como no pato-real o aspeto exterior do macho caracteriza-se por ter penas mais coloridas e é diferente do da fêmea, portanto apresenta dimorfismo sexual. Eles são ovíparos porque o embrião desenvolve-se dentro de um ovo fora do corpo materno e alimenta-se de reservas existentes dentro dele.

Os patos quando nascem têm um aspeto semelhante ao dos seus pais, por isso diz-se que têm um desenvolvimento direto.

Quando estão em época de reprodução vão para zonas mais quentes e com mais alimentos. A este movimento dá-se o nome de migração

A família dos patos pertence ao reino dos Animais.

Miguel Carvalho Rodrigues
5º ano nº 25

[illegible] científica

[illegible] Animalia
[illegible] Chordata
[illegible] Aves
[illegible] Anseriformes
[illegible] Anatidae

[illegible] ou pato-mudo é uma ave que pertence à família Anatidae.

[illegible] aves geralmente anserídeos (gansos e cisnes) e podem ser encontrados tanto na água [illegible] como doce. Os patos alimentam-se de vegetação aquática, moluscos pe- [illegible] e algumas espécies são aves migradoras.

[illegible] identificar os machos principalmente pela coloração diferente ou seja [illegible] vistosa (dado que a grande maioria das espécies de patos tem dimorfismo sexual), e também por diferenças comportamentais. Algumas espécies de patos (quer selvagem, quer domesticados ou criados em cativeiro). São utilizados pelo homem na alimentação, no vestuário (através das penas) e no entreteni- mento (caça).

O pato é um dos poucos animais da natureza que anda, nada e voa com razoável competência. É o único animal que quando dorme metade do cérebro está a descansar, enquanto a outra metade está em alerta. É dotado de perfeito senso de direção e comunida- dade.

Patos (ou patos-mudos em Portugal)
Os patos não emitem sons altos. O macho emite um som que se assemelha ao de um assopro, enquanto a fêmea emite um som semelhante a algo como [bibi]

A cauda dos patos é comprida e tem uma forma que se assemelha a um leque

O tempo de incubação de um ovo de pato é 5 semanas.

[illegible] Pinto [illegible]

A vida do pato

Era uma vez um pato que encontrou uma galinha no galinheiro.

A galinha perguntou ao pato como se chamava.

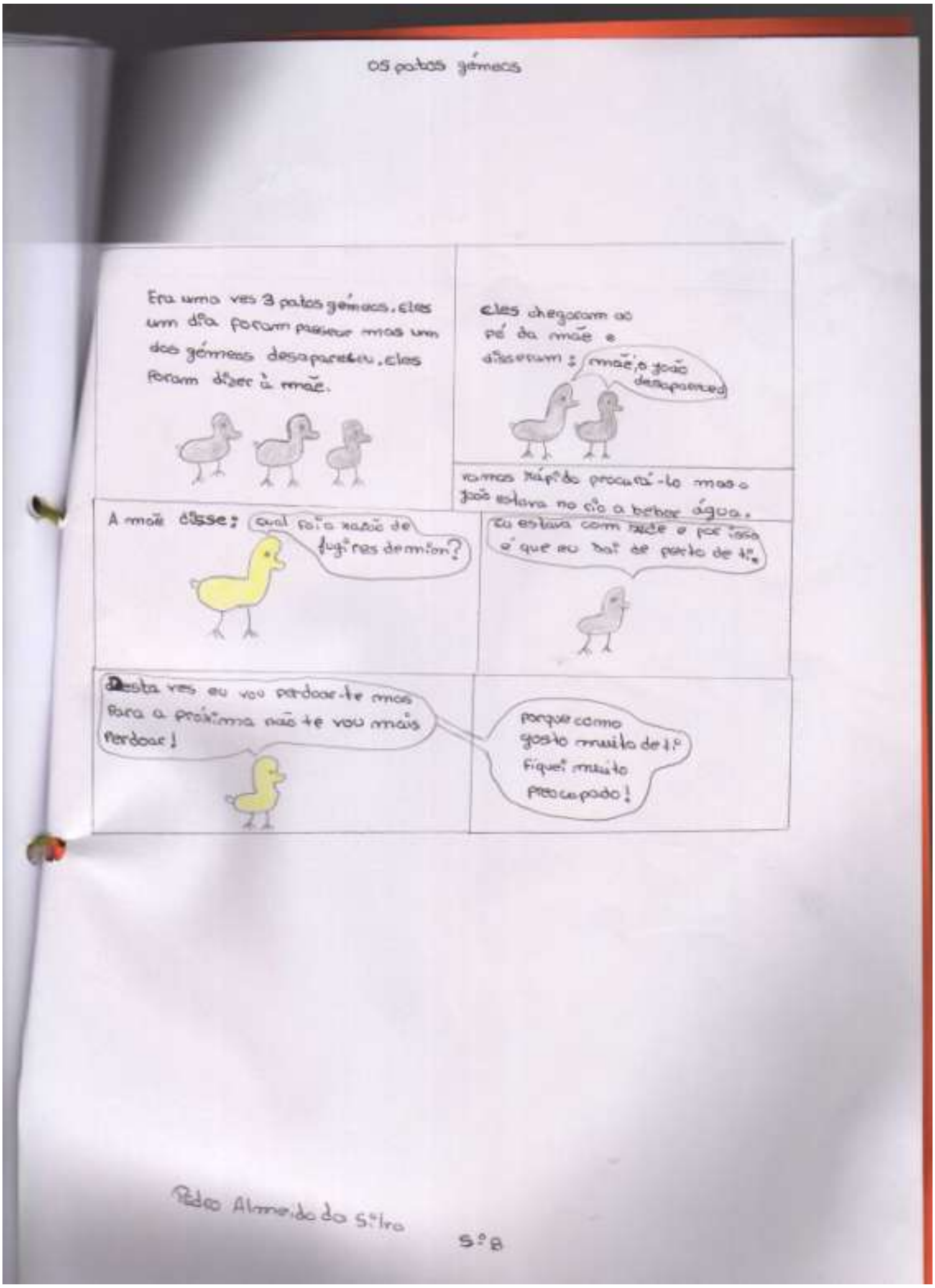
- Eu chamo-me Daniel. E tu?
- Eu chamo-me Beatriz.
- Queres vir brincar comigo e com os meus amigos?
- Sim pode ser mas primeiro vou lanchar. Queres vir?
- Não, obrigada.
- Olha depois vou brincar contigo.

Depois de lanchar foi brincar com o Daniel e os seus amigos. A Beatriz disse a um amigo do Daniel que gostava dele e o amigo disse ao Daniel.

Depois passado algum tempo o Daniel disse à Beatriz que gostava dela. Em seguida começaram a namorar.

Depois casaram-se e viveram felizes para sempre, com dois patos.

5.º B


Os patos gémeos
Era uma ves 3 patos gémeos, eles um dia foram passear mas um dos gémeos desapareceu, eles foram dizer à mãe.
eles chegaram ao pé da mãe e disseram:
mãe, o joão desapareceu
vamos rápido procurá-lo mas o joão estava no rio a beber água.
A mãe disse:
qual foi a razão de fugires de mim?
eu estava com sede e por isso é que eu saí de perto de ti.
Desta ves eu vou perdoar-te mas para a próxima não te vou mais perdoar!
porque como gosto muito de ti fiquei muito preocupado!
Pedro Almeida da Silva
5°B

Apêndice 8 – Autorização à direção pedagógica do Colégio.

(Pedido de autorização à Direção Pedagógica do Colégio D. José I em Santa Joana, Aveiro)

Estimados senhores de direção pedagógica:

Eu, Dulce Maria Figueiredo de Jesus, na qualidade de estagiária, venho solicitar autorização para a recolha de dados, que serão obtidos através de observação de aulas, com possível gravação áudio e fotos aos trabalhos produzidos pelos alunos, na turma B do 5.º ano, no âmbito de uma investigação de Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Universidade de Aveiro.

Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das atividades letivas. Quer no processo de recolha de dados quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos e da escola e ainda a solicitar autorização aos Encarregados de Educação se necessário.

Agradecendo a vossa atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Aveiro, 18 de abril de 2013.

Pede deferimento

____

(Dulce Maria Figueiredo de Jesus)

____

(Membro da Direção pedagógica)